# II- Fonctions vectorielles d'une variable réelle et courbes paramétrées du plan

## 2) Courbes paramétrées du plan

Courbe paramétrée par une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$. Demi-tangente en un point. Point régulier, courbe régulière. Tangente en un point régulier.

Étude locale en un point régulier ou stationnaire, tangente et position relative, point de rebroussement, point d'inflexion. Branches infinies.

Construction d'une courbe à partir de tableaux de variation.

## 3) Propriétés métriques d'une courbe plane

Longueur d'une courbe paramétrée. Abscisse curviligne, paramétrage par abscisse curviligne.

Repère de Frenet, formules de Frenet, courbure en un point régulier. Orientation d'une courbe.

Théorème de relèvement. Expression de la courbure $\gamma = \dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}$. Rayon de courbure en un point birégulier. Centre de courbure. Cercle de courbure.

## 4) Enveloppe d'une famille de droites. Développée

Enveloppe d'une famille de droites données par une représentation paramétrique.

Développée d'une courbure régulière : ensemble des centres de courbure. Caractérisation comme enveloppe des normales.

---

**Questions de cours :**

1. Nature d'un point singulier à l'aide des dérivées successives.
2. Définitions : courbure, rayon de courbure, centre de courbure. Démonstration des formules de Frenet.
3. Repère de Frenet et théorème de relèvement. Preuve de la formule $\gamma = \dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}$
4. Définition de la développée. Démontrer que la développée est l'enveloppe des normales.

**Questions de cours :**

1. *Nature d'un point singulier à l'aide des dérivées successives.*
   Soit $\mathcal{C}$ une courbe plane paramétrée par une fonction vectorielle $f$ de $I$ (intervalle ouvert de $\mathbb{R}$) dans $\mathbb{R}^2$. Soit $M = f(t)$ un point de cette courbe.
   On note $p$ le plus petit entier positif non nul tel que $f^{(p)}(t) \neq (0,0)$ et $q$ le plus petit entier tel que $(f^{(p)}(t), f^{(q)}(t))$ soit une base de $\mathbb{R}^2$.
   Le vecteur $f^{(p)}(t)$ dirige la tangente en $M$ à $\mathcal{C}$.
   Si $p$ est pair alors $M$ est un point de rebroussement (première espèce si $q$ impair et deuxième espèce si $q$ est pair).
   Si $p$ est impair et $q$ est pair alors $M$ est un point d'allure normal (c'est le cas pour un point régulier).
   Si $p$ et $q$ sont impairs alors $M$ est un point d'inflexion.
2. *Définitions : courbure, rayon de courbure, centre de courbure. Démonstration des formules de Frenet.*
   Soit $\mathcal{C}$ une courbe paramétrée par une abscisse curviligne $s \longmapsto f(s)$ (donc $\|f'(s)\| = 1$ et en particulier la courbe est régulière).
   Il existe $\gamma(s) \in \mathbb{R}$ appelé courbure de $\mathcal{C}$ en $M = f(s)$ tel que :
   $$\frac{d\overrightarrow{T}}{ds} = \gamma(s)\overrightarrow{N} \quad \text{et} \quad \frac{d\overrightarrow{N}}{ds} = -\gamma(s)\overrightarrow{T}$$
   *Preuve* : en dérivant $\|\overrightarrow{T}\|^2 = 1$, on a $\langle \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s}, \overrightarrow{T} \rangle = 0$. Donc $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s}$ est colinéaire à $\overrightarrow{T}$. On en déduit l'existence de $\gamma$.
   De même, en dérivant $\|\overrightarrow{N}\|^2 = 1$, on montre qu'il existe $k$ tel que $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s} = k\overrightarrow{N}$
   En dérivant $\langle \overrightarrow{T}, \overrightarrow{N} \rangle = 0$, on montre que $k = -\gamma$.
3. *Repère de Frenet et théorème de relèvement. Preuve de la formule* $\gamma = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}$
   Soit $\mathcal{C}$ une courbe régulière paramétrée par une $f$ de classe $\mathcal{C}^2$ de $I$ dans $\mathbb{R}^2$.
   On appelle repère de Frenet en $M = f(t)$ le repère $(M; \overrightarrow{T}(t), \overrightarrow{N}(t))$ où $\overrightarrow{T} = \frac{f'(t)}{\|f'(t)\|}$ et $\overrightarrow{N}(t)$ le vecteur qui complète $\overrightarrow{T}(t)$ en une base orthonormée directe.
   D'après le théorème de relèvement, il existe une fonction $\alpha$ de classe $\mathcal{C}^1$ telle que :
   $$\forall t \in I, \quad \overrightarrow{T}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha(t)) \\ \sin(\alpha(t)) \end{pmatrix}$$
   On dérive :
   $$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}t} = \alpha'(t) \begin{pmatrix} -\sin(\alpha(t)) \\ \cos(\alpha(t)) \end{pmatrix}$$
   Comme $(\overrightarrow{T}(t), \overrightarrow{N}(t))$ est une base directe :
   $$\overrightarrow{N}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(\alpha(t)) \\ \cos(\alpha(t)) \end{pmatrix}$$
   Donc si $s = t$ est un paramétrage par abscisse curviligne, d'après la première formule de Frenet $\alpha'(s) = \gamma(s)$.

4. *Définition de la développée. Démontrer que la développée est l'enveloppe des normales.*
   La développée d'une courbe est l'ensemble de ses centres de courbure.

   Soit $f$ une courbe régulière, paramétrée par abscisse curviligne.
   On note $(\overrightarrow{T}, \overrightarrow{N})$ la base de Frenet en $M = f(s)$. On cherche l'enveloppe des normales sous la forme :
   $$g(s) = f(s) + \lambda(s)\overrightarrow{N}.$$

   On dérive. D'après la deuxième formule de Frenet et comme $f'(s) = \overrightarrow{T}$ :

   $$\begin{aligned} g'(s) &= f'(s) + \lambda(s)(-\gamma(s)\overrightarrow{T}) + \lambda'(s)\overrightarrow{N} \\ &= (1 - \lambda(s)\gamma(s))\overrightarrow{T} + \lambda'(s)\overrightarrow{N} \end{aligned}$$

   Or $g'(s)$ est colinéaire à $\overrightarrow{N}$ (par définition de l'enveloppe). Donc $1 - \lambda(s)\gamma(s) = 0$, d'où $\lambda(s) = R(s)$.
   On pose $P = g(s)$, on a :
   $$\overrightarrow{PM} = R(s)\overrightarrow{N}.$$

   Donc $P$ est le centre de courbure de $f$ au point $M = f(s)$.