Maths - DM3

à rendre le 5 novembre 2024

L'objectif de ce problème est d'établir l'égalité :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

1. Montrer que la fonction :

$$\varphi \ : t \longmapsto \begin{cases} 2 & \text{si } t = 0 \\ \dfrac{t}{\sin(t/2)} & \text{si } t \neq 0 \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi, \pi[$.

2. (a) Montrer que, pour toute fonction φ continue sur $[0, \pi]$, la suite de terme général

$$\int_0^\pi \varphi(t) \cos\left(\frac{n+1}{2}t\right) \mathrm{d}t$$

est bornée.

On rappelle que toute fonction continue sur un segment est bornée.

(b) Montrer à l'aide d'une intégration par parties que, pour toute fonction φ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$:

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^\pi \varphi(t) \sin\left(\frac{n+1}{2}t\right) \mathrm{d}t = 0$$

3. Montrer que, pour tout $t \in]-\pi, \pi[$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{k=1}^{n} \cos(kt) = \frac{1}{2}\left(\frac{\sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right)}{\sin(t/2)} - 1\right)$$

4. (a) Déterminer $a \in \mathbb{R}$ de sorte que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$\int_0^\pi (at^2 - t)\cos(nt)\mathrm{d}t = \frac{1}{n^2}$$

(b) En déduire qu'il existe une fonction ψ de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \pi]$ telle que, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi \psi(t) \times \sin\left(\frac{2n+1}{2}t\right) \mathrm{d}t$$

(c) Conclure.