II- Fonctions vectorielles d'une variable réelle et courbes paramétrées du plan

3) Propriétés métriques d'une courbe plane

Longueur d'une courbe paramétrée. Abscisse curviligne, paramétrage par abscisse curviligne.

Repère de Frenet, formules de Frenet, courbure en un point régulier. Orientation d'une courbe.

Théorème de relèvement. Expression de la courbure $\gamma = \dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}$. Rayon de courbure en un point birégulier. Centre de courbure. Cercle de courbure.

4) Enveloppe d'une famille de droites. Développée

Enveloppe d'une famille de droites données par une représentation paramétrique.

Développée d'une courbure régulière : ensemble des centres de courbure. Caractérisation comme enveloppe des normales.

III- Intégrales généralisées

1) Intégrale d'une fonction continue sur intervalle

Intégrale convergente d'une fonction continue sur $[a, b[$.
Théorème de comparaison pour les fonctions positives (inégalité, « grand O », équivalent)
Intégrales de référence : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-\alpha t)\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_0^1 \ln t\mathrm{d}t$.
Rélation de Chasles, intégration par parties, changement de variable.

Questions de cours :

1. Définitions : courbure, rayon de courbure, centre de courbure. Démonstration des formules de Frenet.
2. Repère de Frenet et théorème de relèvement. Preuve de la formule $\gamma = \dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}$
3. Définition de la développée. Démontrer que la développée est l'enveloppe des normales.
4. Donner et justifier la nature des intégrales de référence.

---

1. *Définitions : courbure, rayon de courbure, centre de courbure. Démonstration des formules de Frenet.*
   Soit $\mathcal{C}$ une courbe paramétrée par une abscisse curviligne $s \longmapsto f(s)$ (donc $\|f'(s)\| = 1$ et en particulier la courbe est régulière).
   Il existe $\gamma(s) \in \mathbb{R}$ appelé courbure de $\mathcal{C}$ en $M = f(s)$ tel que :
   $$\frac{d\overrightarrow{T}}{ds} = \gamma(s)\overrightarrow{N} \quad \text{et} \quad \frac{d\overrightarrow{N}}{ds} = -\gamma(s)\overrightarrow{T}$$
   Preuve : en dérivant $\|\overrightarrow{T}\|^2 = 1$, on a $\langle \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s}, \overrightarrow{T}\rangle = 0$. Donc $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s}$ est colinéaire à $\overrightarrow{N}$. On en déduit l'existence de γ.

De même, en dérivant $\|\overrightarrow{N}\|^2 = 1$, on montre qu'il existe k tel que $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{N}}{\mathrm{d}s} = k\overrightarrow{T}$

En dérivant $\langle \overrightarrow{T}, \overrightarrow{N} \rangle = 0$, on montre que $k = -\gamma$.

2. *Repère de Frenet et théorème de relèvement. Preuve de la formule* $\gamma = \dfrac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}$

   Soit $\mathcal{C}$ une courbe régulière paramétrée par une f de classe $\mathcal{C}^2$ de I dans $\mathbb{R}^2$.

   On appelle repère de Frenet en $M = f(t)$ le repère $(M; \overrightarrow{T}(t), \overrightarrow{N}(t))$ où $\overrightarrow{T} = \dfrac{f'(t)}{\|f'(t)\|}$ et $\overrightarrow{N}(t)$ le vecteur qui complète $\overrightarrow{T}(t)$ en une base orthonormée directe.

   D'après le théorème de relèvement, il existe une fonction α de classe $\mathcal{C}^1$ telle que :

$$\forall t \in I, \quad \overrightarrow{T}(t) = \begin{pmatrix} \cos(\alpha(t)) \\ \sin(\alpha(t)) \end{pmatrix}$$

   On dérive :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}t} = \alpha'(t) \begin{pmatrix} -\sin(\alpha(t)) \\ \cos(\alpha(t)) \end{pmatrix}$$

   Comme $(\overrightarrow{T}(t), \overrightarrow{N}(t))$ est une base directe :

$$\overrightarrow{N}(t) = \begin{pmatrix} -\sin(\alpha(t)) \\ \cos(\alpha(t)) \end{pmatrix}$$

   Donc si $s = t$ est un paramétrage par abscisse curviligne, d'après la première formule de Frenet $\alpha'(s) = \gamma(s)$.

3. *Définition de la développée. Démontrer que la développée est l'enveloppe des normales.*

   La développée d'une courbe est l'ensemble de ses centres de courbure.

   Soit f une courbe régulière, paramétrée par abscisse curviligne.

   On note $(\overrightarrow{T}, \overrightarrow{N})$ la base de Frenet en $M = f(s)$. On cherche l'enveloppe des normales sous la forme :

$$g(s) = f(s) + \lambda(s)\overrightarrow{N}.$$

   On dérive. D'après la deuxième formule de Frenet et comme $f'(s) = \overrightarrow{T}$:

$$\begin{aligned} g'(s) &= f'(s) + \lambda(s)(-\gamma(s)\overrightarrow{T}) + \lambda'(s)\overrightarrow{N} \\ &= (1 - \lambda(s)\gamma(s))\overrightarrow{T} + \lambda'(s)\overrightarrow{N} \end{aligned}$$

   Or $g'(s)$ est colinéaire à $\overrightarrow{N}$ (par définition de l'enveloppe). Donc $1 - \lambda(s)\gamma(s) = 0$, d'où $\lambda(s) = R(s)$.

   On pose $P = g(s)$, on a :

$$\overrightarrow{PM} = R(s)\overrightarrow{N}.$$

   Donc P est le centre de courbure de f au point $M = f(s)$.

4. *Donner et justifier la nature des intégrales de référence.*

   (i) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ converge si $\alpha > 1$, elle diverge si $\alpha \leq 1$.

   (ii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ converge si $\alpha < 1$, elle diverge si $\alpha \geq 1$.

(iii) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}t$ converge si $\alpha > 0$, elle diverge si $\alpha \leq 0$.

(iv) $\displaystyle\int_0^{1} \ln(t)\mathrm{d}t$ est convergente.

On a $\displaystyle\int_1^{x} \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \ln x$ pour tout $x > 0$. Les intégrales $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ divergent car $\ln x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\infty$ et $\ln x \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

Soit $\alpha \neq 1$. On a $\displaystyle\int_1^{x} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} - 1\right)$ pour tout $x > 0$.

Si $\alpha > 1$ alors $\displaystyle\frac{1}{x^{\alpha-1}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty$ et $\displaystyle\frac{1}{x^{\alpha-1}} \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ diverge et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge.

Si $\alpha < 1$ alors $\displaystyle\frac{1}{x^{\alpha-1}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et $\displaystyle\frac{1}{x^{\alpha-1}} \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ diverge.

Soit $\alpha \neq 0$. On a $\displaystyle\int_0^{x} \mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}t = \frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha x}}{\alpha}$ pour tout $x > 0$

Si $\alpha > 0$ alors $\mathrm{e}^{-\alpha x} \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}t$ est convergente.

Si $\alpha < 0$ alors $\mathrm{e}^{-\alpha x} \underset{x\to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}t$ est divergente.

Pour tout $x > 0$, on a $\displaystyle\int_x^{1} \ln t\,\mathrm{d}t = \Big[t\ln t - t\Big]_x^1 = -1 - x\ln x + x$ et $x\ln x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparée. Donc $\displaystyle\int_0^{1} \ln t\,\mathrm{d}t$ est convergente.