Maths - Interrogation 2 - 1 heure

Exercice 1 Soit $I = \displaystyle\int_{\sqrt{3}}^{+\infty} \frac{1}{t^4 - 1}\mathrm{d}t$.

1. Justifier que l'intégrale définissant I est convergente.
2. Déterminer des réels a, b, c tels que :

$$\frac{1}{t^4 - 1} = \frac{a}{t^2+1} + \frac{b}{t-1} + \frac{c}{t+1}$$

   En déduire la valeur de I.

Exercice 2 Soit $I = \displaystyle\int_{1}^{+\infty} \frac{\ln t}{t^{3/2}}\mathrm{d}t$ et $J = \displaystyle\int_{0}^{1} \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t$

1. Montrer à l'aide d'une intégration par parties que l'intégrale définissant I est convergente et calculer I.
2. Montrer à l'aide du changement de variable $u = 1/t$ que l'intégrale définissant J est convergente et calculer J.

Exercice 3 Étudier la nature des séries suivantes :

$$\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^2 \ln n}, \quad \sum_{n\geqslant 1} \ln n, \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{2^n}{n!}, \quad \sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Exercice 4 Soit (u_n) la suite définie par :

$$\forall n \geqslant 2, \quad u_n = \frac{1}{n^3 - n}$$

1. Montrer que la série de terme général u_n est convergente.
2. Calculer $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n^3 - n}$ en remarquant que :

$$\forall n \geqslant 2, \quad \frac{2}{n^3 - n} = \frac{1}{n-1} - \frac{2}{n} + \frac{1}{n+1}.$$