Maths - Interrogation 2 - corrigé

Exercice 1

1. $t \longmapsto \dfrac{1}{t^4-1}$ est continue sur $[\sqrt{3}, +\infty[$ et $\dfrac{1}{t^4-1} \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^4}$.

   On sait que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^4}\mathrm{d}t$ est convergente. Donc l'intégrale I est convergente.

2. On a, pour tout $t > 1$:

$$\frac{1}{t^4-1} = -\frac{1}{2} \times \frac{1}{t^2+1} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{t-1} - \frac{1}{4} \times \frac{1}{t+1}$$

   Donc :

$$\begin{aligned}
\int_{\sqrt{3}}^{x} \frac{1}{t^4-1}\mathrm{d}t &= \left[-\frac{1}{2}\arctan t + \frac{1}{4}\ln(t-1) - \frac{1}{4}\ln(t+1)\right]_{\sqrt{3}}^{x} \\
&= \left[-\frac{1}{2}\arctan t + \frac{1}{4}\ln\left(\frac{t-1}{t+1}\right)\right]_{\sqrt{3}}^{x} \\
&= -\frac{\pi}{4} - \left(-\frac{\pi}{6} + \frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\right) \\
&= \frac{1}{4}\ln\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} - \frac{\pi}{12} \\
&= \frac{1}{4}\ln(2+\sqrt{3}) - \frac{\pi}{12}
\end{aligned}$$

Exercice 2

1. Les fonctions $u : t \longmapsto \ln t$ et $v : t \longmapsto -2t^{-1/2}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[1, +\infty[$ et leur produit tend vers 0 en $+\infty$ par croissance comparée.

   On a $u'(t) = \dfrac{1}{t}$, $v'(t) = \dfrac{1}{t^{3/2}}$ et $\int_1^{+\infty} u'(t)v(t)\mathrm{d}t$ est convergente ($\alpha = 3/2 > 1$). Donc par intégration par parties généralisée, l'intégrale I est convergente et

$$I = \left[-2\frac{\ln t}{t^{1/2}}\right]_1^{+\infty} + 2\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{3/2}}\mathrm{d}t = 0 - 4\left[\frac{1}{t^{1/2}}\right]_1^{+\infty} = 4$$

2. $\mathrm{d}t = \dfrac{-1}{u^2}\mathrm{d}u$. Donc si l'intégrale J converge :

$$\int_0^1 \frac{\ln t}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t = \int_{+\infty}^{1} \frac{\ln(1/u)}{u^{-3/2}} \times \frac{-1}{u^2}\mathrm{d}u = \int_{+\infty}^{1} \frac{\ln u}{\sqrt{u}}\mathrm{d}u$$

   L'intégrale à droite est convergente, c'est $-I$, donc J est bien convergente et $J = -4$.

Exercice 3

1) $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n^2 \ln n}$ converge car $\dfrac{1}{n^2\ln n} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$

2) $\sum_{n \geqslant 1} \ln n$ diverge grossièrement puisque le terme général ne tend pas vers 0.

3) $\sum_{n \geqslant 1} \frac{2^n}{n!}$ d'après le critère de d'Alembert... déjà fait en cours avec $\sum_{n \geqslant 1} \frac{z^n}{n!}$ où $z \in \mathbb{C}$.

4) $\sum_{n \geqslant 1} \ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ diverge car $\ln\left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{n}}$ et $\sum \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge ($\alpha = \frac{1}{2} \leqslant 1$).

Exercice 4

1. On a $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^3}$. La série de terme général $1/n^3$ est convergente, donc la série de terme général u_n l'est également.
2. Soit $N \geqslant 2$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=2}^{N} u_n &= \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n-1} - \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n+1} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N-1} \frac{1}{n} - \sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n} + \frac{1}{2}\sum_{n=3}^{N+1} \frac{1}{n} \\
&= \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{2}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{N}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{N} + \frac{1}{N+1}\right) \\
&\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Donc $\sum_{n=2}^{+\infty} u_n = \frac{1}{4}$.

Barème : $(2+4)+(4+2)+4+(1+3)$