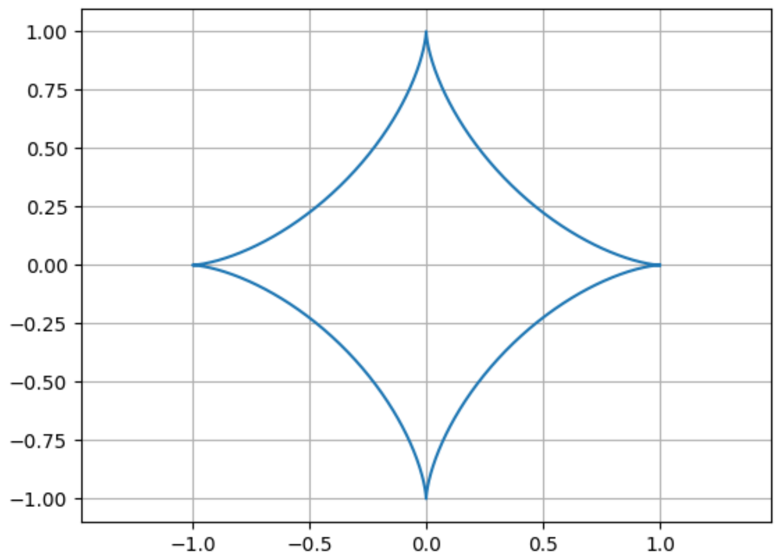
Maths - DS2 - corrigé

Exercice 1

1. Comme $PQ = 1$ et $PQ = \sqrt{x_P^2 + y_Q^2}$, on a $x_P^2 + y_Q^2 = 1$ donc il existe $t \in]\pi, \pi]$ tel que $x_P = \cos t$, $y_Q = \sin t$.
2. La droite $\mathcal{D}_t$ passe par le point P et elle est dirigée par le vecteur $\overrightarrow{PQ}$ donc elle est paramétrée par :
$$\begin{cases} x &= \cos t - \lambda \cos t \\ y &= \lambda \sin t \end{cases}$$
Donc on cherche une fonction vectorielle g de la forme $g(t) = ((1 - \lambda(t)) \cos t, \lambda(t) \sin t)$ où λ est une fonction telle que $\det(g'(t), \overrightarrow{PQ}) = 0$.
$$\det(g'(t), \overrightarrow{PQ}) = \begin{vmatrix} -(1-\lambda(t))\sin t & -\cos t \\ \lambda(t)\cos t & \sin t \end{vmatrix} = -\sin^2 t + \lambda(t)(\cos^2 t + \sin^2 t)$$
On en déduit que $\lambda(t) = \sin^2 t$ puis que l'enveloppe est paramétrée par :
$$\begin{cases} x &= \cos^3 t \\ y &= \sin^3 t \end{cases} \qquad t \in]-\pi, \pi]$$
3. On a $\cos^3(-t) = \cos^3(t)$ et $\sin^3(-t) = -\sin^3(t)$ pour tout t, donc l'enveloppe est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.

   On a $\cos^3(\pi - t) = -\cos^3(t)$ et $\sin^3(\pi - t) = \sin^3(t)$ pour tout t, donc l'enveloppe est symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

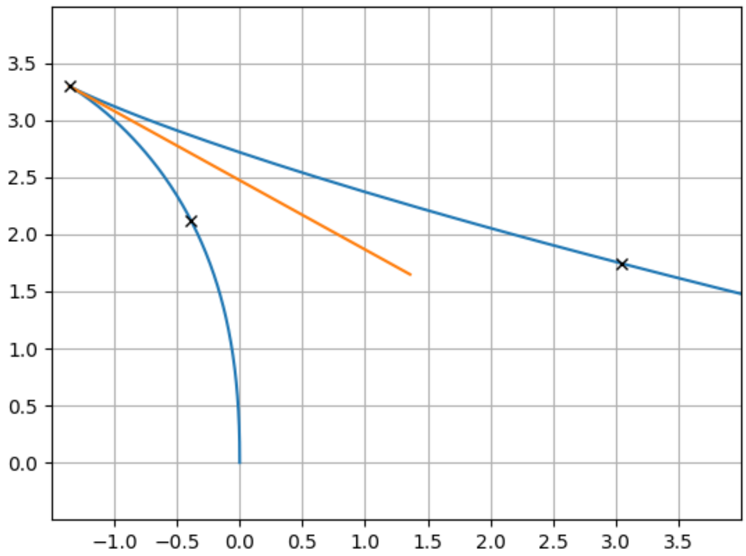
   On a $\cos^3\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin^3(t)$ pour tout t donc l'enveloppe est symétrique par rapport à la droite d'équation $y = x$.
4. $x'(t) = -3\sin t \cos^2 t$ et $y'(t) = 3\cos t \sin^2 t$. Donc $x'(0) = y'(0) = 0$. Le point de paramètre 0 (c'est-à-dire le point A) est un point singulier.
   On a :
$$x''(t) = -3(\cos^3 t - 2\sin^2 t \cos t)$$
$$y''(t) = 3(-\sin^3 t + 2\cos^2 t \sin t)$$
Donc $x''(0) = -3$ et $y''(0) = 0$. Donc $p = 2$ et le point A est un point de rebroussement.
5. La droite $\mathcal{D}_0$ est l'axe des abscisses, la droite $\mathcal{D}_{\pi/2}$ est l'axe des ordonnées et la droite $\mathcal{D}_\pi$ est l'axe des abscisses.



Exercice 2

1. Les fonctions coordonnées de f sont de classe $\mathcal{C}^\infty$ donc f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
2. $$x'(t) = 2(t-1)\mathrm{e}^{2t} + \mathrm{e}^{2t} = (2t-1)\mathrm{e}^{2t}$$
$$y'(t) = (3-2t)\mathrm{e}^{t} - 2\mathrm{e}^{t} = (1-2t)\mathrm{e}^{t}$$
La fonction x est décroisante sur $]-\infty, 1/2]$, croissante sur $[1/2, +\infty[$.
La fonction y est croisante sur $]-\infty, 1/2]$, décroissante sur $[1/2, +\infty[$.
3. On a $f(t) = (0,0)$ si et seulement si $t = \frac{1}{2}$. Donc la courbe admet pour unique point singulier le point $B = f(1/2) = \left(-\frac{1}{2}\mathrm{e}, 2\mathrm{e}^{1/2}\right)$.
De plus :
$$x''(t) = 2(2t-1)\mathrm{e}^{2t} + 2\mathrm{e}^{2t} = 4t\mathrm{e}^{2t}$$
$$y''(t) = (1-2t)\mathrm{e}^{t} - 2\mathrm{e}^{t} = -(2t+1)\mathrm{e}^{t}$$
Donc $f''(1/2) = (2\mathrm{e}, -2\sqrt{\mathrm{e}})$ et le point B est un point de rebroussement. La tangente en ce point est dirigée par $(e, -\sqrt{e})$.
$$x^{(3)}(t) = 4(2t+1)\mathrm{e}^{2t}$$
$$y^{(3)}(t) = -(2t+3)\mathrm{e}^{t}$$
Donc $f^{(3)}(1/2) = (8\mathrm{e}, -4\sqrt{e}) = 4(2\mathrm{e}, -\sqrt{e})$. Ce vecteur n'est pas colinéaire à $f''(1/2)$. Donc $q = 3$. Il s'agit d'un point de rebroussement de première espèce.
4. D'après le tableau de variation, on obtient une branche infinie lorsque t tend vers $+\infty$ puisque les deux coordonnées tendent vers l'infini.
Comme $y(t)/x(t)$ tend vers 0 lorsque t tend vers $+\infty$, la direction asymptotique est horizontale.

5. Par croissance comparée, les fonctions coordonnées ont pour limite 0 en $-\infty$. Donc $\lim\limits_{t\to-\infty} f(t) = (0,0)$. Donc les points de la courbe sont proches de O lorsque t tend vers $-\infty$.
6. Comme $\|f(t)\| \underset{t\to-\infty}{\sim} y(t)$, on a $\lim\limits_{t\to-\infty} \dfrac{f(t)}{\|f(t)\|} = (0,1)$.
   La courbe admet une tangente verticale en O.
7.



Exercice 3

Partie 1 Questions préliminaires

1. (a) L'affixe de l'image est $z' = \mathrm{e}^{i\theta} z$
   (b) L'affixe de l'image est $z' = az$
   (c) On note $M'(z')$ l'image de M par la rotation et $M''(z'')$ l'image de M' par l'homothétie.
   On a $z' = \mathrm{e}^{i\theta} z$ et $z'' = az' = a\mathrm{e}^{i\theta} z$.
   On note $M_1(z_1)$ l'image de M par l'homothétie et $M_2(z_2)$ l'image de M_1 par la rotation.
   On a $z_1 = az$ et $z_2 = \mathrm{e}^{i\theta} z_1 = a\mathrm{e}^{i\theta} z$.
   Comme $z_2 = z''$, on a bien $h_a \circ r_\theta = r_\theta \circ h_a$.
2. (a)

$$\sin a \sin b = -\frac{1}{2}(\cos(a+b) - \cos(a-b))$$
$$\sin a \cos b = \frac{1}{2}(\sin(a+b) + \sin(a-b))$$

(b) Avec $p = a + b$ et $q = a - b$, on a $a = \frac{p+q}{2}$ et $b = \frac{p-q}{2}$ et il vient :

$$\cos p - \cos q = -2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\sin p + \sin q = 2 \sin\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Partie 2 Étude d'une courbe

1. On note $(x(t), y(t))$ les coordonnées de M_t. Donc $z(t) = x(t) + iy(t)$. L'affixe de vecteur $\overrightarrow{P_tM_t}$ est $z(t) - 2\mathrm{e}^{it}$ Donc :
$$z(t) - 2\mathrm{e}^{it} = \mathrm{e}^{-2it}$$
On en déduit que $x(t) = 2\cos(t) + \cos(2t)$ et $y(t) = 2\sin(t) - \sin(2t)$.
2. $z\left(t + \frac{2\pi}{3}\right) = 2\mathrm{e}^{it+2i\frac{\pi}{3}} + \mathrm{e}^{-2it-i\frac{4\pi}{3}} = \mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{3}} z(t)$.
Donc (question 1 de la partie 1) l'affixe de $M_{t+\frac{2\pi}{2}}$ et l'affixe de l'image de M_t par la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{3}$ sont égales. On en déduit que la courbe est invariante par rotation d'angle $2\pi/3$.
3. Les fonctions x et y sont 2π-périodique donc on étudie la courbe sur un intervalle de longueur 2π. Comme la fonction est invariante par rotation d'angle $2\pi/3$, on peut se limiter à l'intervalle $[-\pi/3, \pi/3]$ et on complétera par rotation de centre O et d'angles $2\pi/3$ et $-2\pi/3$. Comme la fonction x est paire et la fonction y est impaire, on peut se limiter à $[0, \pi/3]$ et on complétera symétrie par rapport à l'axe des abscisses.
4. $$x'(t) = -2\sin t - 2\sin(2t) = -4\sin\left(\frac{3t}{2}\right)\cos\left(\frac{t}{2}\right)$$
5. $$y'(t) = 2\cos t - 2\cos(2t) = 4\sin\left(\frac{3t}{2}\right)\sin\left(\frac{t}{2}\right)$$
6. Supposons que $t \in [0, \pi/3]$. On a $3t/2 \in [0, \pi/2]$ donc le cosinus et le sinus de $3t/2$ sont positifs. De plus le cosinus et le sinus de $t/2$ sont positifs puisque $0 \leqslant t/2 \leqslant \pi/2$.
Donc, sur $[0, \pi/3]$, la fonction x' est négative et la fonction y' est positive. Donc la fonction x est décroissante et la fonction y est croissante sur $[0, \pi/3]$.
Le point de paramètre $t = 0$ a pour coordonnées $(3, 0)$ et le point de paramètre $t = \pi/3$ a pour coordonnées $(1/2, \sqrt{3}/2)$.
7. Le point de paramètre $t = 0$ est un point singulier puisque $x'(0) = y'(0) = 0$.
$$x''(t) = -2\cos t - 4\cos(2t)$$
$$y''(t) = -2\sin t + 4\sin(2t)$$
Donc $x''(0) = -6$ et $y''(0) = 0$. Il s'agit d'un point de rebroussement et la tangente en ce point est horizontale. Comme la courbe est symétrique par rapport à l'axe des abscisses, c'est un point de rebroussement de première espèce.

8.

$$\begin{aligned}\ell &= 6\int_0^{\pi/3}\sqrt{x'(t)^2+y'(t)^2}\mathrm{d}t\\ &= 24\int_0^{\pi/3}\sin(3t/2)\mathrm{d}t\\ &= 16\left[-\cos\left(\frac{3t}{2}\right)\right]_0^{\pi/3} = 16\end{aligned}$$

Exercice 4

1. (a) On note C_1, C_2, C_3, C_4 les colonnes de A. On remarque que $C_2 = C_4 - C_1$ et $C_3 = 2C_1 + C_4$. De plus et que C_1 et C_4 ne sont pas colinéaires donc (C_1, C_4) est une base de $\operatorname{Im} f$.

   (b) Non car $(1, 1, 0, -1) \in \operatorname{Im} f \cap \ker f$.

   (c) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & -1 \\ -2 & 4 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 8 & -4 & 4 \end{pmatrix}$ et $A^3 = 3A^2$.

   (d) Le sous-espace vectoriel $\ker f^2$ a pour équation $x - 2y + z - t = 0$. C'est un hyperplan car il est défini par une (seule) équation (et non pas par un système de plusieurs équations).

   (e) Le vecteur $(1, -2, 0, -4)$ forme une base de $\operatorname{Im} f^2$.

   (f) Soit $X \in \operatorname{Im} f^2 \cap \ker f^2$. Alors il existe λ tel que $X = (\lambda, -2\lambda, 0, -4\lambda)$. Comme X vérifie l'équation $x - 2y + z - t = 0$, on a $9\lambda = 0$, d'où $X = 0$.
   On en déduit, avec le théorème du rang, que $\ker f^2$ et $\operatorname{Im} f^2$ sont supplémentaires.

   (g) Comme $A^2 = 3A^3$, on a immédiatement $\operatorname{Im} f^2 = \operatorname{Im} f^3$.

2. (a) Soit $y \in \operatorname{Im} f^{k+1}$. Il existe $x \in E$, tel que $y = f^{k+1}(x) = f^k(f(x))$. Donc $y \in \operatorname{Im} f^k$. D'où l'inclusion. Donc $\operatorname{rang} f^{k+1} = \dim \operatorname{Im} f^{k+1} \leqslant \dim \operatorname{Im} f^k = \operatorname{rang} f^k$. La suite $\left(\operatorname{rang} f^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante.

   (b) La suite $\left(\operatorname{rang} f^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est donc décroissante et minorée par 0. Donc elle converge. Mais comme c'est une suite d'entiers, elle est stationnaire. Autrement dit il existe $k_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\operatorname{Im} f^k = \operatorname{Im} f^{k_0}$ pour tout $k \geqslant k_0$.

   (c) On a $f(F) = f^{k_0+1}(F) = f^{k_0}(F)$. Donc F est stable par f et l'endomorphisme induit par f sur F est surjectif. Comme F est de dimension finie, cet endomorphisme est bijectif.

   (d) Soit $y \in \operatorname{Im} f^{k_0} \oplus \ker f^{k_0}$. Il existe $x \in E$ tel que $y = f^{k_0}(x)$ et on a $f^{k_0}(y) = 0$. Mais alors $f^{2k_0}(x) = 0$. Donc $x \in \ker f^{2k_0}$.
   Comme $\operatorname{Im} f^{k_0} = \operatorname{Im} f^{2k_0}$, d'après le théorème du rang, on a $\ker f^{k_0} = \ker f^{2k_0}$. Mais comme $\ker f^{k_0} \subset \ker f^{2k_0}$, les deux noyaux sont en réalité égaux et ainsi $x \in \ker f^{k_0}$.
   On en déduit que $y = 0$. On conclut en appliquant une nouvelle fois le théorème du rang.

Barème : 42 points (30 points pour avoir 20)
Exercice 1 : 7 = 0,5+2+1,5+1+2
Exercice 2 : 10,5 = 0,5+2+2+1+1,5+1,5+2
Exercice 3 : 12,5
Partie 1 : 3,5 = 0,5+0,5+0,5+1+1
Partie 2 : 9 = 1+1+1+1+1+1+1+2
Exercice 4 : 12=1+1+1+1+1+1+0.5+1+1+2+1.5