III- Intégrales généralisées

1) Intégrale d'une fonction continue sur intervalle

Intégrale convergente d'une fonction continue sur $[a, b[$.
Théorème de comparaison pour les fonctions positives (inégalité, « grand O », équivalent)
Intégrales de référence : $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_0^{+\infty} \exp(-\alpha t)\mathrm{d}t$, $\displaystyle\int_0^1 \ln t\mathrm{d}t$.
Rélation de Chasles, intégration par parties, changement de variable.

2) Intégrabilité d'une fonction continue sur un intervalle

Définition d'une fonction intégrable.
Espace vectoriel des fonctions continues intégrables sur I. Linéarité, positivité et croissance de l'application $f \longmapsto \displaystyle\int_I f(t)\mathrm{d}t$.
Théorème de comparaison pour les fonctions intégrables (inégalité, « grand O », équivalent)

Questions de cours

1. *Donner et justifier la nature des intégrales de référence.*

   (i) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ converge si $\alpha > 1$, elle diverge si $\alpha \leq 1$.

   (ii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t$ converge si $\alpha < 1$, elle diverge si $\alpha \geq 1$.

   (iii) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}t$ converge si $\alpha > 0$, elle diverge si $\alpha \leq 0$.

   (iv) $\displaystyle\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$ est convergente.

   On a $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t = \ln x$ pour tout $x > 0$. Les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ divergent car $\ln x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} -\infty$ et $\ln x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
   Soit $\alpha \neq 1$. On a $\displaystyle\int_1^x \frac{1}{t^\alpha}\mathrm{d}t = \frac{1}{1-\alpha}\left(\frac{1}{x^{\alpha-1}} - 1\right)$ pour tout $x > 0$.
   Si $\alpha > 1$ alors $\dfrac{1}{x^{\alpha-1}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} +\infty$ et $\dfrac{1}{x^{\alpha-1}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ diverge et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge.
   Si $\alpha < 1$ alors $\dfrac{1}{x^{\alpha-1}} \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ et $\dfrac{1}{x^{\alpha-1}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ diverge.
   Soit $\alpha \neq 0$. On a $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}t = \frac{1-\mathrm{e}^{-\alpha x}}{\alpha}$ pour tout $x > 0$
   Si $\alpha > 0$ alors $\mathrm{e}^{-\alpha x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}t$ est convergente.

Si $\alpha < 0$ alors $\mathrm{e}^{-\alpha x} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t}\mathrm{d}t$ est divergente.

Pour tout $x > 0$, on a $\displaystyle\int_x^1 \ln t\,\mathrm{d}t = \Big[t\ln t - t\Big]_x^1 = -1 - x\ln x + x$ et $x\ln x \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparée. Donc $\displaystyle\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t$ est convergente.

2. *Montrer que si f est une fonction continue intégrable sur $]a,b[$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est une intégrale convergente.*

   On pose $f^+(x) = \dfrac{|f(x)| + f(x)}{2}$ et $f^-(x) = \dfrac{|f(x)| - f(x)}{2}$. Les fonctions f^+ et f^- sont positives et continues sur $]a,b[$. De plus :

   $$\forall x \in]a,b[, \quad f^+(x) \leq |f(x)|$$

   et $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ est convergente, donc, par comparaison $\displaystyle\int_a^b f^+(x)\mathrm{d}x$ est également convergente. De même :

   $$\forall x \in]a,b[, \quad f^-(x) \leq |f(x)|$$

   donc, par comparaison $\displaystyle\int_a^b f^-(x)\mathrm{d}x$ est également convergente.

   Comme $f = f^+ - f^-$, on en déduit que $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ est convergente.

3. *Définitions : intégrale convergente, fonction intégrable.*

   Soit f est application continue de $[a,b[$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ admet une limite finie en b, on dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge.

   Soit f une fonction continue réelle ou complexe) sur un intervalle I dont les bornes sont a et b $(a < b)$. On dit que f est intégrable sur I lorsque $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$ est convergente.