Maths - DM2 - corrigé

1. (a) $f(-t) = (\cos t, -\sin t \cos t)$ donc la courbe est symétrique par rapport à l'axe des abscisses.

   (b) $f(\pi - t) = -f(t)$ donc la courbe est symétrique par rapport à l'origine du repère.

   (c) La fonction $t \longmapsto \cos t$ est décroissante sur $[0, \pi/2]$.
   $$y'(t) = \cos^2 t - \sin^2 t = \cos(2t).$$
   Donc $y'(t) \geqslant 0$ si $t \in [0, \pi/4]$ et $y'(t) \leqslant 0$ si $t \in [\pi/4, \pi/2]$. Donc y est croissante sur $[0, \pi/4]$ et décroissante sur $[\pi/4, \pi/2]$.

   (d) On a $f'(t) = (-\sin t, \cos(2t)$ et $f''(t) = (-\cos t, -2\sin(2t))$. Donc :
   $$\det(f'(t), f''(t)) = 2\sin t \sin(2t) + \cos(2t)\cos t = \cos t(1 + 2\sin^2 t).$$
   Ce déterminant en nul si seulement si $\cos t = 0$. Donc la courbe n'est pas birégulière au point O.

   (e) La tangente au point O est dirigé par $f'(\pi/2) = (-1, -1)$. La courbe admet une tangente horizontale lorque $y'(t) = 0$ donc au point de paramétre $\pi/4$. La courbe admet une tangente verticale lorque $x'(t) = 0$ donc au point de paramétre 0.

   (f) $\mathcal{C}_1 = f\left(\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]\right)$ est la partie de la courbe dans le quart de plan $x \geqslant 0$ et $y \geqslant 0$.
   $\mathcal{C}_2 = f\left(\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]\right)$ est symétrique de $\mathcal{C}_1$ par rapport à l'axe des absicsses.
   $\mathcal{C}_3 = f\left(\left[-\pi, -\frac{\pi}{2}\right]\right)$ est symétrique de $\mathcal{C}_1$ par rapport à l'origine.

2. (a) $x_P^2 + y_P^2 = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$ donc P appartient au cercle trigonométrique.

   (b) Figure à faire avec la courbe $\mathcal{C}$!

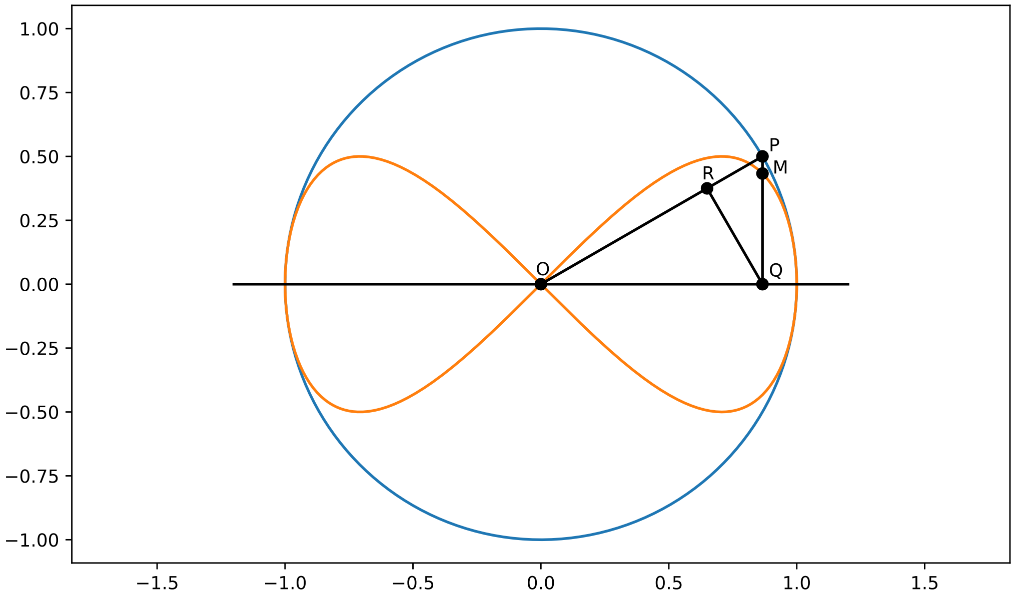
   (c) Q a pour coordonnées $(\cos\alpha, 0)$.

   (d) On a $\overrightarrow{OQ}.\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OR}.\overrightarrow{OP}$ et il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{OR} = \lambda\overrightarrow{OQ}$.
   Or $\overrightarrow{OQ}.\overrightarrow{OP} = \cos\alpha \times \cos\alpha + 0 \times \sin\alpha = \cos^2\alpha$. Donc $\lambda = \cos^2\alpha$ et R a pour coordonnées $(\cos^3\alpha, \cos^2\alpha\sin\alpha)$.

   (e) On cherche $t \in [0, \pi/2]$ tel que le point M de coordonnées $(\cos t, \sin t \cos t)$.
   Nécessairement $\cos t = \cos\alpha$. Donc $t = \alpha$ et M a pour coordonnées $(\cos\alpha, \sin\alpha\cos\alpha)$.
   Ce point appartient bien au segment $[PQ]$ car $\sin\alpha\cos\alpha \in [0, \sin\alpha]$.

   (f) On a $QM = \sin\alpha\cos\alpha$ et :
   $$\begin{aligned} QR &= \sqrt{(\cos^3\alpha - \cos\alpha)^2 + (\cos^2\alpha\sin\alpha)^2} \\ &= \cos\alpha\sqrt{(\cos^2\alpha - 1)^2 + \cos^2\alpha\sin^2\alpha} \\ &= \cos\alpha\sqrt{\sin^4\alpha + \cos^2\alpha\sin^2\alpha} \\ &= \cos\alpha\sin\alpha = QM \end{aligned}$$

   (g) Il suffit de calculer MR :
   $$\begin{aligned} MR &= \sqrt{(\cos^3\alpha - \cos\alpha)^2 + (\cos^2\alpha\sin\alpha - \sin\alpha\cos\alpha)^2} \\ &= \cos\alpha\sin\alpha\sqrt{2(1 - \cos\alpha)} \end{aligned}$$
   Le triangle est équilatéral pour $\alpha = \pi/3$.


1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
−0.25
−0.50
−0.75
−1.00
−1.5
−1.0
−0.5
0.0
0.5
1.0
1.5
P
M
R
O
Q