III- Intégrales généralisées

2) Intégrabilité d'une fonction continue sur un intervalle

Définition d'une fonction intégrable.

Espace vectoriel des fonctions continues intégrables sur I. Linéarité, positivité et croissance de l'application $f \longmapsto \int_I f(t)\mathrm{d}t$.

Théorème de comparaison pour les fonctions intégrables (inégalité, « grand O », équivalent)

IV- Série numériques et séries entières

1) Séries numériques

Comparaison série-intégrale

Théorème de comparaison série-intégrale : si f est une fonction positive, continue, décroissante sur $[n_0, +\infty[$ alors la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature.

Séries à termes positives

Critères de convergence (inégalité, « grand O », équivalent). Règle de d'Alembert.

Séries absolument convergentes

Convergence absolue d'une série à termes réels ou complexes, suite sommable. La convergence absolue implique la convergence. Inégalité triangulaire

Les théorèmes de comparaison (inégalité, « grand O », équivalent).

Règle de d'Alembert.

Théorème des séries alternées.

Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.

Questions de cours :

1. *Montrer que si f est une fonction continue intégrable sur $]a, b[$ alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est une intégrale convergente.*

   On pose $f^+(x) = \dfrac{|f(x)| + f(x)}{2}$ et $f^-(x) = \dfrac{|f(x)| - f(x)}{2}$. Les fonctions f^+ et f^- sont positives et continues sur $]a, b[$. De plus :

   $$\forall x \in]a, b[, \quad f^+(x) \leq |f(x)|$$

   et $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\mathrm{d}x$ est convergente, donc, par comparaison $\displaystyle\int_a^b f^+(x)\mathrm{d}x$ est également convergente. De même :

   $$\forall x \in]a, b[, \quad f^-(x) \leq |f(x)|$$

   donc, par comparaison $\displaystyle\int_a^b f^-(x)\mathrm{d}x$ est également convergente.

Comme $f = f^+ - f^-$, on en déduit que $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ est convergente.

2. *Définitions : intégrale convergente, fonction intégrable.*

   Soit f est application continue de $[a, b[$ dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Si la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ admet une limite finie en b, on dit que l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ converge.

   Soit f une fonction continue réelle (ou complexe) sur un intervalle I dont les bornes sont a et b $(a < b)$. On dit que f est intégrable sur I lorsque $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\mathrm{d}t$ est convergente.

3. *Règle de d'Alembert. Théorème des séries alternées. Théorème sur le produit de Cauchy.*

   Soit (u_n) une suite qui ne s'annule pas à partir d'un certain rang et telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers une limite ℓ lorsque n tend vers $+\infty$.

   Si $|\ell| > 1$ alors la série de terme général u_n diverge.
   Si $|\ell| < 1$ alors la série de terme général u_n converge.

   Soit (u_n) une suite positive. Si la suite (u_n) décroit et converge vers 0 alors la série $\sum(-1)^n u_n$ est convergente.

   Soit (u_n), (v_n) deux suites et (w_n) la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$$

   Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent absolument alors la série de terme général w_n converge absolument et :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n$$