Maths - DS3 - 4 heures

Exercice 1
On se place dans le plan muni du repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On note $\mathcal{C}$ le cercle de centre O et de rayon 1.

Pour tout $t \in [0, \pi/2]$, on considère le point $M(t)$ de $\mathcal{C}$ tel que l'angle $(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{OM(t)}})$ soit égal à t. On note $H(t)$ le projeté orthogonal de $M(t)$ sur l'axe des abscisses, $P(t)$ le symétrique de O par rapport à $H(t)$, et $\mathcal{D}_t$ la droite passant par les points $M(t)$ et $P(t)$.

1. Faire une figure en prenant $t = \frac{\pi}{6}$.
2. Déterminer l'enveloppe Γ des droites $(\mathcal{D}_t)_{0 \leqslant t \leqslant \pi/2}$.
3. Calculer la longueur de la courbe Γ.

Exercice 2 On considère la suite (S_n) définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

1. Donner la nature des séries $\displaystyle\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{\sqrt{k}}$ et $\displaystyle\sum_{k \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{k\sqrt{k}}$. Quelle est la limite de la suite (S_n) ?
2. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on a :
$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} \leqslant \int_k^{k+1} \frac{1}{\sqrt{t}} \mathrm{d}t \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}}.$$
Accompagner la réponse d'un schéma.
3. Montrer que pour tout $n \geqslant 2$, on a :
$$S_n - 1 \leqslant 2(\sqrt{n} - 1) \leqslant S_n - \frac{1}{\sqrt{n}}$$
En déduire un encadrement puis un équivalent de S_n.
4. On considère la suite (u_n) définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = S_n - 2\sqrt{n}.$$
   (a) Donner le développement limité à l'ordre de 2 de $\sqrt{1-x}$ lorsque x tend vers 0.
   (b) Vérifier que $u_n - u_{n-1} = \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (c) Montrer que $u_n - u_{n-1} \underset{n \to +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$.
   (d) La série de terme général $u_n - u_{n-1}$ est-elle convergente ?
   (e) La suite (u_n) est-elle convergente ?

Exercice 3 Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n \exp(-t^2)\mathrm{d}t, \quad J_n = \int_{-\infty}^{+\infty} t^n \exp(-t^2)\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que si f est une fonction paire continue sur $\mathbb{R}$ alors les intégrales impropres $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature et elles sont égales en cas de convergence.
2. Montrer que les intégrales I_n et J_n sont convergentes pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Calculer I_1.
4. Soit $k \in \mathbb{N}$. Donner une relation entre I_{2k} et J_{2k}. Que vaut J_{2k+1} ?
5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Donner une relation entre I_n et I_{n+2}.
6. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que :
$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad I_{2k} = \frac{(2k)!}{2^{2k}k!} \times C.$$
7. Donner une expression de I_{2k+1} pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice 4

On note u la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{t^2-1}}$.

1. Justifier la convergence et calculer l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$ à l'aide du changement de variable $u = \mathrm{e}^x$.
2. Justifier que la fonction u est continue sur $]1, +\infty[$.
3. Donner un équivalent de $u(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$.
4. Montrer qu'il existe une constante $K \in \mathbb{R}$ telle que $u(t) \underset{t\to 1}{\sim} \dfrac{K}{\sqrt{t-1}}$.
5. Quelle est la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 u(t)\mathrm{d}t$?
6. Quelle est la nature de l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} u(t)\mathrm{d}t$?
7. Pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha\sqrt{t^2-1}}\mathrm{d}t$ est-elle convergente ?
8. Montrer que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t^2-1}}$ est convergente et calculer cette intégrale à l'aide du changement de variable $t = \mathrm{ch}(u)$.

Exercice 5 Soit (a_n) la suite définie pour tout $n \geqslant 1$ par :

$$a_n = \frac{n+2}{n(n+1)}$$

1. Quelle est la nature de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n$? Justifier.
2. Déterminer le rayon de convergence des séries entières $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}x^n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$
3. Soit f la fonction $x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}x^n$.
   (a) Justifier que f est dérivable sur $]-1,1[$ et donner une expression simple de $f'(x)$.
   En déduire une expression de $f(x)$ pour tout $x \in]-1,1[$.
   (b) Montrer que f est continue sur $[-1,1[$.
   En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$.
4. Montrer qu'il existe des réels α et β tels que, pour tout $n \geqslant 1$:

$$a_n = \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n+1}$$

5. Soit g la fonction $x \longmapsto \sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.
   (a) Donner une expression de $g(x)$ pour tout $x \in]-1,1[$.
   (b) Montrer que $g(x) \underset{x\to 1}{\sim} -\ln(1-x)$.
   (c) Montrer que $g(-1)$ est bien défini et donner sa valeur.