Maths - Interrogation 3 - corrigé

Exercice 1
La fonction $f\ : t \longmapsto \dfrac{1}{t+1} - \dfrac{2}{t+2} + \dfrac{1}{t+3}$ est une fonction rationnelle définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-3,-2,-1\}$. Donc elle est continue sur $\mathbb{R}^+$. Elle admet pour primitive :

$$F\ : t \longmapsto \ln(t+1) - 2\ln(t+2) + \ln(t+3) = \ln\left(\frac{(t+1)(t+3)}{(t+2)^2}\right)$$

Comme $\lim\limits_{t\to+\infty} F(t) = \ln(1) = 0$, l'intégrale I converge et $I = -F(0) = 2\ln 2 - \ln 3$.

Exercice 2

1. La fonction $t \longmapsto \dfrac{\ln t}{t^3}$ est continue sur $[1,+\infty[$.
   Par croissance comparée $\dfrac{\ln t}{t^3} \underset{t\to+\infty}{=} o(1/t^2)$ et $t \longmapsto 1/t^2$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, donc l'intégrale I converge.
2. Par exemple $t \longmapsto -\dfrac{1}{2t^2}$.
3. $u(t) = \ln t$, $v'(t) = \frac{1}{t^3}$, $u'(t) = 1/t$, $v(t) = -\dfrac{1}{2t^2}$.
   Par croissance comparée, $u(t)v(t) \underset{\to 0}{\longrightarrow} 0$. Donc :

$$I = \left[-\frac{\ln t}{2t^2}\right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} \frac{1}{2t^3}\mathrm{d}t = 0 + \left[-\frac{1}{4t^2}\right]_1^{+\infty} = \frac{1}{4}$$

Exercice 3

1. f est continue sur $]0,1[$, $f(t) \underset{t\to 0}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ et $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{t}}$ est intégrable en 0 donc f est intégrable en 0.
2. f est continue sur $]0,1[\cup]1,2]$, $f(t) \underset{t\to 1}{\sim} \dfrac{1}{t-1}$ et $t \longmapsto \dfrac{1}{t-1}$ n'est pas intégrable en 1 (ni en 1^+, ni en $1-$) donc f n'est pas intégrable en 1.
3. f est continue sur $]1,+\infty[$, $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t^{5/2}}$ et $t \longmapsto \dfrac{1}{t^{5/2}}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$ donc f est intégrable sur $[2,+\infty[$.

Exercice 4
La fonction f est continue sur $\mathbb{R}$, et :

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad |f(t)| \leqslant \frac{1}{1+t^2} \leqslant \frac{1}{t^2}$$

Comme $t \longmapsto \dfrac{1}{t^2}$ est intégrable sur $[1,+\infty[$, f est intégrable sur $\mathbb{R}^+$, et comme f est paire, elle est intégrable sur $\mathbb{R}$.