# IV- Série numériques et séries entières

## 1) Séries numériques

### Comparaison série-intégrale

Théorème de comparaison série-intégrale : si $f$ est une fonction positive, continue, décroissante sur $[n_0, +\infty[$ alors la série $\sum f(n)$ et l'intégrale $\displaystyle\int_{n_0}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ sont de même nature.

### Séries à termes positives

Critères de convergence (inégalité, « grand O », équivalent). Règle de d'Alembert.

### Séries absolument convergentes

Convergence absolue d'une série à termes réels ou complexes, suite sommable. La convergence absolue implique la convergence. Inégalité triangulaire

Les théorèmes de comparaison (inégalité, « grand O », équivalent).

Règle de d'Alembert.

Théorème des séries alternées.

Produit de Cauchy de deux séries absolument convergentes.

## 2) Série entière

### a) Rayon de convergence

Lemme d'Abel. Définition du rayon de convergence. Disque ouvert de convergence, intervalle ouvert de convergence.

Si $|a_n| \leq |b_n|$ à partir d'un certain rang alors le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est supérieur ou égal à celui de $\sum b_n x^n$.
Si $a_n \sim b_n$ alors les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ ont même rayon de convergence.
Les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum n a_n x^n$ ont même rayon de convergence.

Rayon de convergence de la somme et du produit de Cauchy de deux séries entières.

### b) Propriétés de la somme d'une série entière d'une variable réelle

Fonction somme d'une série entière. Continuité de la fonction somme sur son ensemble de définition.

La somme de la série entière est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence. Dérivation terme à terme. Relation entre les coefficients et les dérivées successives en 0.

Intégration terme à terme sur un segment inlcus dans l'intervalle ouvert de convergence.

**Questions de cours :**

1. *Règle de d'Alembert. Théorème des séries alternées. Théorème sur le produit de Cauchy.*
Soit $(u_n)$ une suite qui ne s'annule pas à partir d'un certain rang et telle que $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ tend vers une limite $\ell$ lorsque $n$ tend vers $+\infty$.
Si $|\ell| > 1$ alors la série de terme général $u_n$ diverge.
Si $|\ell| < 1$ alors la série de terme général $u_n$ converge.

Soit $(u_n)$ une suite positive. Si la suite $(u_n)$ décroit et converge vers 0 alors la série $\sum (-1)^n u_n$ est convergente.

Soit $(u_n)$, $(v_n)$ deux suites et $(w_n)$ la suite définie par :
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$$
Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent absolument alors la série de terme général $w_n$ converge absolument et :
$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \sum_{n=0}^{+\infty} v_n = \sum_{n=0}^{+\infty} w_n$$

2. *Expliquer ce qu'est le rayon de convergence d'une série entière. Montrer que si $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$ alors les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ ont même rayon de convergence.*
Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est la borne supérieure de l'ensemble $\{r \in \mathbb{R}^+ /\text{la suite } (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$.
— Si cette borne supérieure est infinie, cela signifie que la série convergence absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$.
— Si cette borne supérieure est nulle, cela signifie que la série diverge grossièrement pour tout $z \neq 0$.
— Sinon, c'est l'unique réel $R > 0$ tel que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ converge absolument pour tout $z$ de module strictement inférieur à $R$, diverge grossièrement pour tout $z$ de module strictement supérieur à $R$.
Supposons que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$ alors $a_n x^n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n x^n$ pour tout $x$ réel. Donc les séries $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n x^n$ sont de même nature pour tout $x$ réel, donc les séries entières ont le même rayon de convergence.

3. *Montrer que si $0 \leq |a_n| \leq |b_n|$ à partir d'un certain rang alors le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est supérieur à celui de $\sum b_n x^n$.*
Supposons que $0 \leq |a_n| \leq |b_n|$ pour tout $n \geq n_0$. Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$ :
$$\forall n \geq n_0, \quad 0 \leq |a_n z^n| \leq |b_n z^n|$$
Donc si la suite $(b_n z^n)$ est bornée alors la suite $(a_n z_n)$ est bornée. Donc :
$$\{r \in \mathbb{R}^+, (b_n r^n) \text{ bornée}\} \subset \{r \in \mathbb{R}^+, (a_n r^n) \text{ bornée}\}$$
Cela implique que :
$$\sup\{r \in \mathbb{R}^+, (b_n r^n) \text{ bornée}\} \leq \sup\{r \in \mathbb{R}^+, (a_n r^n) \text{ bornée}\}$$
Donc le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est supérieur à celui de $\sum b_n x^n$.