Maths - DS3 - Corrigé

Exercice 1

1. Faire une figure en prenant $t = \frac{\pi}{6}$.
2. Le point M a pour coordonnées $(\cos t, \sin t)$ et le point P a pour coordonnées $(2\cos t, 0)$. Donc $\overrightarrow{MP}$ a pour coordonnées $(\cos t, -\sin t)$.
   On cherche l'enveloppe sous la forme :
   $$g(t) = M + \lambda(t)\overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix}\cos t\\ \sin t\end{pmatrix} + \lambda(t)\begin{pmatrix}\cos t\\ -\sin t\end{pmatrix}$$
   On dérive :
   $$g'(t) = \begin{pmatrix}-\sin t\\ \cos t\end{pmatrix} + \lambda(t)\begin{pmatrix}-\sin t\\ -\cos t\end{pmatrix} + \lambda'(t)\begin{pmatrix}\cos t\\ -\sin t\end{pmatrix}$$
   Comme $g'(t)$ et $\overrightarrow{MP}$ sont colinéaires :
   $$\begin{vmatrix}-\sin t - \lambda(t)\sin t & \cos t\\ \cos t - \lambda(t)\cos t & -\sin t\end{vmatrix} = 0$$
   Donc :
   $$\sin^2(t) + \sin^2(t)\lambda(t) - \cos^2(t) + \cos^2(t)\lambda(t) = 0$$
   Donc :
   $$\lambda(t) = \cos^2 t - \sin^2 t = 2\cos^2 t - 1 = 1 - 2\sin^2 t$$
   Donc $g(t) = \begin{pmatrix}2\cos^3 t\\ 2\sin^3 t\end{pmatrix}$.
3. $$\begin{aligned}\Gamma &= 6\int_0^{\pi/2} \sqrt{(-\sin t\cos^2 t)^2 + (\cos t\sin^2 t)^2}\mathrm{d}t\\ &= 6\int_0^{\pi/2} \sin t\cos t\sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t}\mathrm{d}t\\ &= 3\int_0^{\pi/2} \sin(2t)\mathrm{d}t\\ &= 3\left[-\frac{\cos(2t)}{2}\right]_0^{\pi/2} = 3\end{aligned}$$

Exercice 2

1. La série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{k}}$ est une série de Riemann divergente ($\alpha = 1/2 \leqslant 1$). Donc la limite de (S_n) est $+\infty$. La série $\sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{k\sqrt{k}}$ est une série de Riemann convergente ($\alpha = 3/2 > 1$).

2. La fonction $t \longmapsto 1/\sqrt{t}$ est décroissante donc, pour tout $t \in [k, k+1]$:
$$\frac{1}{\sqrt{k+1}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{t}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}}.$$
On en déduit ce qui demandé en intégrant l'encadrement par rapport à t de k à $k+1$.
3. On somme l'encadrement précédent pour k allant de 1 à $n-1$. On a :
$$\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k+1}} \leqslant \int_1^n \frac{1}{\sqrt{t}}\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}},$$
puis, en calculant l'intégrale :
$$S_n - 1 \leqslant 2(\sqrt{n}-1) \leqslant S_n - \frac{1}{\sqrt{n}}.$$
On a aussi :
$$2(\sqrt{n}-1) + \frac{1}{\sqrt{n}} \leqslant S_n \leqslant 2\sqrt{n} - 1.$$
En divisant par $2\sqrt{n}$ et en appliquant le théorème d'encadrement, on déduit de cet encadrement que S_n est équivalent à $2\sqrt{n}$.
4. (a) $\sqrt{1-x} \underset{x \to 0}{=} 1 - \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + o(x^2)$.

(b)
$$\begin{aligned} u_n - u_{n-1} &= S_n - S_{n-1} - 2(\sqrt{n} - \sqrt{n-1}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right) \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} u_n - u_{n-1} &= \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}\left(\frac{1}{2n} + \frac{1}{8n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{4n^{3/2}} + o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right) \end{aligned}$$
Donc $u_{n+1} - u_n \underset{n \to +\infty}{=} O\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$

(d) D'après la question précédente, par comparaison, la série est convergente.

(e) D'après la question précédente, par télescopage, la suite est convergente.

Exercice 3

1. Par le changement de variable $x = -t$, les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^0 f(-x)\mathrm{d}x$ sont de même nature et, en cas de convergence :
$$\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^0 f(-x)\mathrm{d}x$$
Si f est paire alors $f(-x) = f(x)$ pour tout x réel, ce qui permet de conclure.

2. On a $t^{n+2}\mathrm{e}^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ par croissance comparée, donc $t^n\mathrm{e}^{-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$. La fonction $t \longmapsto t^n\mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$ est convergente. Donc l'intégrale I_n est convergente et, par parité, l'intégrale J_n l'est également.
3. $I_1 = \displaystyle\lim_{x\to+\infty} \left[-\frac{1}{2}\exp(-t^2)\right]_0^x = \frac{1}{2}$.
4. $J_{2k} = 2I_{2k}$ (d'après la première question) et $J_{2k+1} = 0$ (changement de variable $x = -t$, la fonction sous l'intégrale est impaire)
5. Supposons $n \geqslant 0$.
On pose $u(t) = -\frac{1}{2}\exp(-t^2)$ et $v(t) = t^{n+1}$. Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et leur produit tend vers 0 par croissance comparée. De plus l'intégrale I_{n+2} est convergente, donc, par intégration par parties généralisée :
$$I_{n+2} = \left[-\frac{1}{2}t^{n+2}\exp(-t^2)\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{2}(n+1)\int_0^{+\infty} t^n\exp(-t^2)\mathrm{d}t$$
Puisque $n \geqslant 2$, la partie entre crochets est nulle et on a :
$$I_{n+2} = \frac{n+1}{2}I_n$$
6. Nécessairement $C = I_0$. On raisonne par récurrence. Pour $k = 0$, la formule est vraie. Supposons qu'elle est vraie pour $k \in \mathbb{N}$. On a :
$$\begin{aligned} I_{2k+2} &= \frac{2k+1}{2}I_{2k} \\ &= \frac{2k+1}{2} \times \frac{(2k)!}{2^{2k}k!} \times C \\ &= \frac{(2k+2)!}{(2k+2)\times 2^{2k+1}k!}C \\ &= \frac{(2k+2)!}{2^{2k+2}(k+1)!}C \end{aligned}$$
c'est bien la formule attendue.
7. On a, d'après la question 5 :
$$I_{2k+1} = \frac{2k}{2}I_{2k-1} = kI_{2k-1}$$
Donc, par une récurrence immédiate (qu'il faut écrire) : $I_{2k+1} = \frac{1}{2} \times k!$.

Exercice 4

1. Par le changement de variable $u = \mathrm{e}^x$, si l'une des deux intégrales est convergente, on a :
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{e}^x + \mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t.$$
Pour tout $T > 0$, on a :
$$\int_1^T \frac{1}{1+t^2}\mathrm{d}t = \Big[\arctan t\Big]_1^T = \arctan(T) - \frac{\pi}{4} \underset{T\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\pi}{4}.$$

Donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^x + e^{-x}}dx$ converge et vaut $\pi/4$.

2. La fonction $x \longmapsto x^{-1/2}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.
   La fonction $t \longmapsto t^2 - 1$ est polynomiale donc continue, et elle est strictement positive sur $]1, +\infty[$. Donc par composition u est continue sur cet intervalle.
3. $u(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{t}$.
4. $u(t) \underset{t\to 1}{\sim} \dfrac{K}{\sqrt{t-1}}$ avec $K = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.
5. On a $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t-1}}dt = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx$ par le changement de variable $x = t - 1$. Donc ces intégrales convergent (intégrale de Riemann avec $\alpha = 1/2 < 1$). Donc d'après la question 4, $\displaystyle\int_1^2 u(t)dt$ converge.
6. D'après la question 3, l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} u(t)dt$ diverge.
7. Soit $x > 0$. La fonction $v\ : t \longmapsto \frac{1}{t^\alpha\sqrt{t^2-1}}$ est continue sur $]1, +\infty[$. On a :
$$v(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} \frac{1}{t^{\alpha+1}}.$$
   L'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^{\alpha+1}}dt$ est convergente si et seulement si $\alpha > 0$. Donc l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha\sqrt{t^2-1}}dt$ est convergente si et seulement si $\alpha > 0$.
   Par ailleurs :
$$u(t) \underset{t\to1}{=} O\left(1/\sqrt{t-1}\right).$$
   La fonction $t \longmapsto t^{-1/2}$ est intégrable sur $]0, 1]$ et :
$$\int_0^1 t^{-1/2}dt = \int_1^2 \frac{1}{\sqrt{t-1}}dt,$$
   donc l'intégrale $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t^n\sqrt{t^2-1}}dt$ est convergente.
8. Par le changement de variable $t = \mathrm{ch}(u)$:
$$I_1 = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\mathrm{ch}u\sqrt{\mathrm{ch}^2(u) - 1}} \times \mathrm{sh}(u)du.$$
   On sait que $\mathrm{ch}^2(u) - 1 = \mathrm{sh}^2(u)$, donc :
$$I_1 = 2\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^u + e^{-u}}du = \frac{\pi}{2}.$$

Exercice 5

1. La série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n$ est divergente car $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.

2. Les séries entières $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n$ et $\sum_{n=1}^{+\infty} x^n$ ont même rayon de convergence (propriété du cours). Le rayon de convergence est donc égal à 1.

3. (a) f est une série entière de rayon de convergence 1, donc f est dérivable sur $]-1,1[$ et, pour tout $x \in]-1,1[$:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1} = \frac{1}{1-x}$$

Donc il existe $K \in \mathbb{R}$, tel que pour tout $x \in]-1,1[$:

$$f(x) = -\ln(1-x) + K$$

Comme $f(0) = 0$, $K = 0$ et $f(x) = -\ln(1-x)$ pour tout $x \in]-1,1[$.

(b) La série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ est alternée et la suite de terme général $1/n$ est décroissante et converge vers 0. Donc la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente (critère spécial des séries alternées). Donc f est continue sur $[-1,1[$.
Comme f est continue en 1 :

$$\lim_{x \to 0} f(x) = f(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

Or, pour tout $x \in]-1,1[$, $f(x) = -\ln(1-x)$. Donc (par unicité de la limite) :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n} = -\ln 2.$$

4. On a, pour tout $n \geqslant 1$:

$$a_n = \frac{2}{n} - \frac{1}{n+1}$$

5. (a) Soit $x \in]-1,1[$. On a $g(0) = 0$. Si $x \neq 0$:

$$\begin{aligned}
g(x) &= 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n+1} x^n \\
&= -2\ln(1-x) - \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n} x^{n-1} \\
&= -2\ln(1-x) - \frac{1}{x} \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{n} x^n \\
&= -2\ln(1-x) + \frac{\ln(1-x) + x}{x} \\
&= \frac{-(2x-1)\ln(1-x) + x}{x}
\end{aligned}$$

(b) Pour tout $x \in]0,1[$, $g(x) = -\dfrac{2x-1}{x} \times \ln(1-x) + 1$.
On en déduit que $g(x) \underset{x\to 1}{\sim} -\ln(1-x)$.

(c) La suite (a_n) converge vers 0.
On pose $u(t) = \dfrac{t+2}{t(t+1)}$. La fonction u est décroissante sur $\mathbb{R}^{+*}$ car :

$$\forall t > 0, \quad u'(t) = -\frac{t^2+4t+2}{t(t+1)} < 0$$

Donc la suite (a_n) est décroissante et la série de terme général $(-1)^n a_n$ converge. Donc g est continue sur $[-1,1[$ et (même raisonnement qu'à la question 3b) :

$$g(-1) = \lim_{x\to -1} -\frac{2x-1}{x}\ln(1-x) + 1 = 1 - 3\ln 2$$

Barème : 41

Exercice 1 : $6 = 1 + 3 + 2$
Exercice 2 : $8.5 = 1.5 + 2 + 2 + 0.5 + 0.5 + 1 + 0.5 + 0.5$
Exercice 3 : $7.5 = 1 + 1.5 + 1 + 1 + 2 + 1$
Exercice 4 : $7.5 = 1.5 + 0.5 \times 5 + 2 + 1.5$
Exercice 5 : $11.5 = 1 + 1.5 + 2 + 2 + 1 + 2 + 1 + 1$

Il fallait atteindre 30 points pour avoir 20.