IV- Série numériques et séries entières

2) Série entière

a) Rayon de convergence

Lemme d'Abel. Définition du rayon de convergence. Disque ouvert de convergence, intervalle ouvert de convergence.

Si $|a_n| \leq |b_n|$ à partir d'un certain rang alors le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est supérieur ou égal à celui de $\sum b_n x^n$.
Si $a_n \sim b_n$ alors les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ ont même rayon de convergence.
Les séries entières $\sum a_n x^n$ et $\sum n a_n x^n$ ont même rayon de convergence.

Rayon de convergence de la somme et du produit de Cauchy de deux séries entières.

b) Propriétés de la somme d'une série entière d'une variable réelle

Fonction somme d'une série entière. Continuité de la fonction somme sur son ensemble de définition.

La somme de la série entière est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle ouvert de convergence. Dérivation terme à terme. Relation entre les coefficients et les dérivées successives en 0.

Intégration terme à terme sur un segment inlcus dans l'intervalle ouvert de convergence.

c) Fonctions développables en série entière

Fonction développable en série entière au voisinage de 0. Unicité du développement en série entière.

Développements usuels : e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\cosh x$, $\sinh x$, $\dfrac{1}{1-x}$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$.

V- Réduction des endomorphismes et des matrices

1) Déterminants

Définition du déterminant.

Propriétés du déterminant : le déterminant d'une matrice ayant deux colonnes égales est nul, expression de $\det(\lambda A)$ où $\lambda \in \mathbb{K}$, effet sur un déterminant des opérations élémentaires en lignes et en colonnes, développement du déterminant par rapport à une colonne ou une ligne.

Déterminant d'une matrice triangulaire, déterminant d'un produit, de l'inverse, de la transposée.

Une matrice carrée est inversible si et seulement si son déterminant est nul.

Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base. Caractérisation des bases. Déterminant d'un endomorphisme. Caractérisation des automorphismes.

Questions de cours ou exercice :

1. *Expliquer ce qu'est le rayon de convergence d'une série entière. Montrer que si* $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$ *alors les séries entières* $\sum a_n x^n$ *et* $\sum b_n x^n$ *ont même rayon de convergence.*

   Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est la borne supérieure de l'ensemble $\{r \in \mathbb{R}^+ / \text{la suite } (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée}\}$.
   - Si cette borne supérieure est infinie, cela signifie que la série convergence absolument pour tout $z \in \mathbb{C}$.
   - Si cette borne supérieure est nulle, cela signifie que la série diverge grossièrement pour tout $z \neq 0$.
   - Sinon, c'est l'unique réel $R > 0$ tel que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ converge absolument pour tout z de module strictement inférieur à R, diverge grossièrement pour tout z de module strictement supérieur à R.

   Supposons que $a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n$ alors $a_n x^n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n x^n$ pour tout x réel. Donc les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n x^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n x^n$ sont de même nature pour tout x réel, donc les séries entières ont le même rayon de convergence.

2. *Montrer que si* $0 \leq |a_n| \leq |b_n|$ *à partir d'un certain rang alors le rayon de convergence de* $\sum a_n x^n$ *est supérieur à celui de* $\sum b_n x^n$*.*

   Supposons que $0 \leq |a_n| \leq |b_n|$ pour tout $n \geq n_0$. Alors, pour tout $z \in \mathbb{C}$:

   $$\forall n \geq n_0, \quad 0 \leq |a_n z^n| \leq |b_n z^n|$$

   Donc si la suite $(b_n z^n)$ est bornée alors la suite $(a_n z_n)$ est bornée. Donc :

   $$\{r \in \mathbb{R}^+, (b_n r^n) \text{ bornée}\} \subset \{r \in \mathbb{R}^+, (a_n r^n) \text{ bornée}\}$$

   Cela implique que :

   $$\sup\{r \in \mathbb{R}^+, (b_n r^n) \text{ bornée}\} \leq \sup\{r \in \mathbb{R}^+, (a_n r^n) \text{ bornée}\}$$

   Donc le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ est supérieur à celui de $\sum b_n x^n$.

3. *Développement en série entière de* $\ln(1+x)$ *et de* $\ln(1-x)$*.*

   On sait que $\sum_{n=0}^{+\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$ pour tout $t \in]-1,1[$. Le rayon de convergence de la série entière est 1, donc par le théorème d'intégration des séries entières, par tout $x \in]-1,1[$:

   $$\int_0^x \sum_{n=0}^{+\infty} t^n \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^x t^n \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

   D'autre part :

   $$\int_0^x \frac{1}{1-t} \mathrm{d}t = \Big[-\ln(1-t) \Big]_0^x = -\ln(1-x)$$

   Donc :

   $$\ln(1-x) = -\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$$

En remplaçant x par $-x$:

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n$$

4. *Développement en série entière de* e^x.

L'équation différentielle $y' = y$ avec $y(0) = 1$ admet pour unique solution la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^x$.

On cherche une solution f de cette équation de la forme :

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_n x^n$$

où (a_n) est une suite et f une série entière de rayon de convergence $+\infty$.

On sait qu'une série entière est dérivable sur son intervalle ouvert de convergence et pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

Comme $f' = f$ par unicité du développement en série entière :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = (n+1) a_{n+1}.$$

Une récurrence facile établit que $a_n = \dfrac{a_0}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Comme $f(0) = 1$ et $f(0) = a_0$, on a $a_0 = 1$. On en déduit que nécessairement :

$$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Or cette série entière a pour rayon de convergence $+\infty$. Donc :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$$