V- Réduction des endomorphismes et des matrices

1) Déterminants

Définition du déterminant.

Propriétés du déterminant : le déterminant d'une matrice ayant deux colonnes égales est nul, expression de $\det(\lambda A)$ où $\lambda \in \mathbb{K}$, effet sur un déterminant des opérations élémentaires en lignes et en colonnes, développement du déterminant par rapport à une colonne ou une ligne.

Déterminant d'une matrice triangulaire, déterminant d'un produit, de l'inverse, de la transposée.

Une matrice carrée est inversible si et seulement si son déterminant est nul.

Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base. Caractérisation des bases. Déterminant d'un endomorphisme. Caractérisation des automorphismes.

2) Éléments propres

Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre d'un endomorphisme en dimension quelconque.

Une somme finie de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est directe.

Questions de cours ou exercice :

1. *Montrer que* $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$ *en utilisant les propriétés élémentaires du déterminant.*

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & d \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & b \\ c & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ c & d \end{vmatrix} \\ &= ad - bc\end{aligned}$$

2. *Déterminant d'un produit. Montrer que si* $\det A = 0$ *alors* A *n'est pas inversible. Déterminant de l'inverse d'une matrice inversible, déterminant de deux matrices semblables*

   $\det(AB) = \det(A)\det(B)$ (propriété admise).

   Si A est inversible alors $\det(A)\det(A^{-1}) = \det(I) = 1\,(\star)$ donc $\det(A) \neq 0$. Par contraposée si $\det(A) = 0$ alors A n'est pas inversible.

   Si A est inversible $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$ d'après $(\star)$.

   Si $\det(PAP^{-1}) = \det(P)\det(A)\det(P^{-1}) = \det(A)$. Donc deux matrices semblables ont même déterminant.

3. *Définition de valeur propre, vecteur propre, sous-espace propres. Lien entre sous-espace propre et noyau*

   Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$.

   On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u lorsqu'il existe un vecteur x non nul de E tel que $u(x) = \lambda x$.

   On dit que x est un vecteur propre de u lorsque x est non nul et il existe un scalaire λ tel que $u(x) = \lambda x$.

   On dit que F est un sous-espace propre de u s'il est non réduit à $\{0_E\}$ et s'il existe un scalaire λ tel que $u(x) = \lambda x$ pour tout $x \in F$.

Soit λ une valeur propre et $E_\lambda(u)$ le sous-espace propre associé. On a :

$$\begin{aligned} x \in E_\lambda(u) &\iff u(x) = \lambda x \\ &\iff u(x) - \lambda x = 0_E \\ &\iff (u - \lambda id_E)(x) = 0_E \\ &\iff x \in \ker(u - \lambda id_E) \end{aligned}$$

Donc $E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda id_E)$.