V- Réduction des endomorphismes et des matrices

2) Éléments propres

Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre d'un endomorphisme en dimension quelconque.

Une somme finie de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est directe. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme en dimension finie. Les racines du polynôme caractéristique sont les valeurs propres.

Spectre d'une matrice carrée, d'un endomorphisme en dimension finie.

Ordre de multiplicité d'une valeur propre. Il est supérieur ou égal à la dimension du sous-espace propre associé.

Éléments propres et polynôme caractéristique d'une matrice.

3) Endomorphismes et matrices diagonalisables

Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale.

Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est diagonalisable si et seulement si la somme de ses sous-esapces propres est égale à E.

Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé et si l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est égal à la dimension du sous-espace propre associé.

Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n ayant n valeurs propres distinctes est diagonalisable.

Matrices diagonalisables.

Questions de cours ou exercice :

1. *Définition de valeur propre, vecteur propre, sous-espace propres. Lien entre sous-espace propre et noyau*

   Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$.

   On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u lorsqu'il existe un vecteur x non nul de E tel que $u(x) = \lambda x$.

   On dit que x est un vecteur propre de u lorsque x est non nul et il existe un scalaire λ tel que $u(x) = \lambda x$.

   On dit que F est un sous-espace propre de u s'il est non réduit à $\{0_E\}$ et s'il existe un scalaire λ tel que $u(x) = \lambda x$ pour tout $x \in F$.

   Soit λ une valeur propre et $E_\lambda(u)$ le sous-espace propre associé. On a :

$$\begin{aligned} x \in E_\lambda(u) &\iff u(x) = \lambda x \\ &\iff u(x) - \lambda x = 0_E \\ &\iff (u - \lambda id_E)(x) = 0_E \\ &\iff x \in \ker(u - \lambda id_E) \end{aligned}$$

   Donc $E_\lambda(u) = \ker(u - \lambda id_E)$.

2. *Définition du polynôme caractéristique. Montrer que les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique.*

   Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$ et $\chi_u(X) = \det(Xid_E - u)$ son polynôme caractéristique.

$$\begin{aligned}\lambda \in \mathrm{sp}(u) &\iff \exists x \in E\backslash\{0_E\}, \quad u(x) = \lambda x\\ &\iff \exists x \in E\backslash\{0_E\}, \quad (u - \lambda id_E)(x) = 0_E\\ &\iff \ker(u - \lambda id_E) \neq \{0_E\}\\ &\iff \det(u - \lambda id_E) = 0\end{aligned}$$

3. *Comparer la dimension d'un sous-espace propre et l'ordre de multiplicité de la valeur propre associée.*

   Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\chi_u(X) = \det(Xid_E - u)$ son polynôme caractéristique.

   Soit λ une valeur propre. On pose $p = \dim\ker(u - \lambda id_E)$, c'est-à-dire la dimension du sous-espace propre de u associé à λ.

   Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de $\ker(u - \lambda id_E)$ que l'on complète en une base $\mathcal{B}$ de E. On note A la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda I_p & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

   où B est une matrice avec p lignes et $n - p$ colonnes et C une matrice carrée avec $n - p$ lignes.

$$\chi_u(X) = \begin{vmatrix} (X - \lambda)I_p & -B \\ 0 & XI_{n-p} - C \end{vmatrix} = (X - \lambda)^p P(X)$$

   par linéarité sur les p premières colonnes et on posant $P(X) = \begin{vmatrix} I_p & -B \\ 0 & XI_{n-p} - C \end{vmatrix}$ qui est un polynôme.

   On en déduit que λ est une racine de χ_u de multiplicité au moins p.