V- Réduction des endomorphismes et des matrices

2) Éléments propres

Valeur propre, vecteur propre, sous-espace propre d'un endomorphisme en dimension quelconque.

Une somme finie de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes est directe. Polynôme caractéristique d'un endomorphisme en dimension finie. Les racines du polynôme caractéristique sont les valeurs propres.

Spectre d'une matrice carrée, d'un endomorphisme en dimension finie.

Ordre de multiplicité d'une valeur propre. Il est supérieur ou égal à la dimension du sous-espace propre associé.

Éléments propres et polynôme caractéristique d'une matrice.

3) Endomorphismes et matrices diagonalisables

Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est dit diagonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale.

Un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie est diagonalisable si et seulement si la somme de ses sous-esapces propres est égale à E.

Un endomorphisme est diagonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé et si l'ordre de multiplicité de chaque valeur propre est égal à la dimension du sous-espace propre associé.

Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension n ayant n valeurs propres distinctes est diagonalisable.

Matrices diagonalisables.

4) Endomorphismes et matrices trigonalisables

Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est dit trigonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure.

Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé. En particulier tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel est trigonalisable.

Expressions du déterminant et de la trace d'un endomorphisme trigonalisable en fonction de ses valeurs propres.

Matrices trigonalisables.

VI- Probabilités discrètes

A- Espaces probabilisés

a) Ensembles dénombrables

Un ensemble est dit dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$. Ensemble fini ou dénombrable. Dénombrabilité de $\mathbb{N}$, de $\mathbb{Z}$, d'un produit cartésien de deux ensembles dénombrables.

b) Espaces probabilisés

Définition d'une tribu sur un ensemble Ω. Définition d'une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

On appelle espace probabilisé un triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ où $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω et P une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Propriétés : pour toute suite (A_n) d'événements de $\mathcal{A}$:

(i) $\displaystyle\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

(ii) Si (A_n) est une suite croissante : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$.

(iii) Si (A_n) est une suite décroissante : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$.

(iv) $\displaystyle P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$.

Questions de cours

1. *Définition du polynôme caractéristique. Montrer que les valeurs propres sont les racines du polynôme caractéristique.*

   Soit u un endomorphisme d'un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$ et $\chi_u(X) = \det(Xid_E - u)$ son polynôme caractéristique.

$$\begin{aligned}\lambda \in \mathrm{sp}(u) &\iff \exists x \in E\backslash\{0_E\}, \quad u(x) = \lambda x \\ &\iff \exists x \in E\backslash\{0_E\}, \quad (u - \lambda id_E)(x) = 0_E \\ &\iff \ker(u - \lambda id_E) \neq \{0_E\} \\ &\iff \det(u - \lambda id_E) = 0\end{aligned}$$

2. *Comparer la dimension d'un sous-espace propre et l'ordre de multiplicité de la valeur propre associée.*

   Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\chi_u(X) = \det(Xid_E - u)$ son polynôme caractéristique.

   Soit λ une valeur propre. On pose $p = \dim\ker(u - \lambda id_E)$, c'est-à-dire la dimension du sous-espace propre de u associé à λ.

   Soit $(e_1, \ldots, e_p)$ une base de $\ker(u - \lambda id_E)$ que l'on complète en une base $\mathcal{B}$ de E. On note A la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$.

$$A = \begin{pmatrix} \lambda I_p & B \\ 0 & C \end{pmatrix}$$

   où B est une matrice avec p lignes et $n-p$ colonnes et C une matrice carrée avec $n-p$ lignes.

$$\chi_u(X) = \begin{vmatrix} (X-\lambda)I_p & -B \\ 0 & XI_{n-p} - C \end{vmatrix} = (X-\lambda)^p P(X)$$

   par linéarité sur les p premières colonnes et on posant $P(X) = \begin{vmatrix} I_p & -B \\ 0 & XI_{n-p} - C \end{vmatrix}$ qui est un polynôme.

   On en déduit que λ est une racine de χ_u de multiplicité au moins p.

3. *Définition tribu, espace probabilisé, événements, événements incompatibles. Cas d'un univers fini*
   Soit Ω un ensemble. Une tribu sur Ω est une partie $\mathcal{A}$ de $\mathcal{P}(\Omega)$ telle que :
   (i) $\Omega \in \mathcal{A}$
   (ii) $\overline{A} \in \mathcal{A}$ pour tout $A \in \mathcal{A}$
   (iii) $\displaystyle\bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} A_i \in A$ pour toute suite $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathcal{A}$.
   Les éléments de $\mathcal{A}$ sont appelés événements. On dit que deux événements A et B sont incompatibles lorsque $A \cap B = \emptyset$.

   Lorsque Ω est un ensemble fini, on peut remplacer (iii) par :
   (iii') $A \cup B \in \mathcal{A}$ pour tout A et B dans $\mathcal{A}$.
   Un espace probabilisé est un triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ où Ω est un ensemble, $\mathcal{A}$ est une tribu sur cet ensemble, P est une application de $\mathcal{A}$ dans $\mathbb{R}^+$ telle que :
   (i) $P(\Omega) = 1$
   (ii) $P\left(\displaystyle\bigcup_{i\in\mathbb{N}^*} A_i\right) = \displaystyle\sum_{i=1}^{+\infty} P(A_i)$ pour toute suite $(A_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathcal{A}$ deux à deux incompatibles.

   Lorsque Ω est un ensemble fini, on peut remplacer (iii) par :
   (ii') $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ pour tous élements A et B de $\mathcal{A}$ tels que $A \cap B = \emptyset$.