V- Réduction des endomorphismes et des matrices

4) Endomorphismes et matrices trigonalisables

Un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie est dit trigonalisable s'il existe une base dans laquelle sa matrice est triangulaire supérieure.

Un endomorphisme est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique est scindé. En particulier tout endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel est trigonalisable.

Expressions du déterminant et de la trace d'un endomorphisme trigonalisable en fonction de ses valeurs propres.

Matrices trigonalisables.

VI- Probabilités discrètes

A- Espaces probabilisés

a) Ensembles dénombrables

Un ensemble est dit dénombrable s'il est en bijection avec $\mathbb{N}$. Ensemble fini ou dénombrable. Dénombrabilité de $\mathbb{N}$, de $\mathbb{Z}$, d'un produit cartésien de deux ensembles dénombrables.

b) Espaces probabilisés

Définition d'une tribu sur un ensemble Ω. Définition d'une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

On appelle espace probabilisé un triplet $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ où $\mathcal{A}$ est une tribu sur Ω et P une probabilité sur $(\Omega, \mathcal{A})$.

Propriétés : pour toute suite (A_n) d'événements de $\mathcal{A}$:

(i) $\displaystyle\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

(ii) Si (A_n) est une suite croissante : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$.

(iii) Si (A_n) est une suite décroissante : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P(A_n) = P\left(\bigcap_{n=0}^{+\infty} A_n\right)$.

(iv) $\displaystyle P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n)$.

c) Conditionnement et indépendance

Si A et B sont deux événements tels que $P(B) > 0$, définition de la probabilité conditionnelle de A sachant B. Notation $P_B(A)$ ou $P(A|B)$.

Formule des probabilités composées. Système complet dénombrable d'événements. Formule des probabilités totales. Formules de Bayes. Indépendance de deux événements. Indépendance mutuelle d'une famille finie d'événements.

B- Variables aléatoires discrètes

a) Généralités

Définition d'une variable aléatoire discrète. Loi d'une variable aléatoire discrète.

Fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle.

Si X prend ses valeurs dans $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ les x_n étant distincts, et si (p_n) est une suite de réels positifs vérifiant $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 1$ alors il existe une probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{A})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X = x_n) = p_n$.

Indépendance de deux variables aléatoires. Variables mutuellement indépendantes.

b) Lois usuelles

Loi de Bernoulli, loi binomiale, loi uniforme, loi géométrique, loi de Poisson.

c) Espérance et variance

Espérance d'une variable aléatoire réelle discrète X à valeurs dans un ensemble dénombrable.

Théorème de transfert et variance seront dans les programmes de colles des semaines 15 et 16.

Questions de cours

1. *Si* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *est un espace probabilisé et* B *un événement tel que* $P(B) \neq 0$ *alors* P_B *est une probabilité sur* $(\Omega, \mathcal{A})$

   (i) $P_B(\Omega) = \dfrac{P(B \cap \Omega)}{P(B)} = \dfrac{P(B)}{P(B)} = 1.$

   (ii) Soit (A_i) une suite d'événements deux à deux incompatibles.

$$P_B\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} A_i\right) = \frac{P\left(\bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} (A_i \cap B)\right)}{P(B)} = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \sum_{i=1}^{+\infty} P_B(A_i)$$

2. *Événement négligeable, événement presque sûr, événement indépendant (définitions). Montrer que si* A *est indépendant de lui-même alors* A *est négligeable ou presque sûr. Montrer que si* A *est négligeable ou presque sûr alors* A *est indépendant de tout événement.*

   Soit $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé. Soit A un événement.

   On dit que A est négligeable si $P(A) = 0$ et que A est presque sûr si $P(A) = 1$.

   Deux événement A et B sont indépendants lorsque $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

   Supppons que A est indépendant de lui-même. Comme $P(A) = P(A \cap A) = P(A)^2$, on a $P(A)(1 - P(A)) = 0$, d'où $P(A) = 0$ ou $P(A) = 1$.

   Supposons A négligeable. Soit B événement.

   Comme $A \cap B \subset A$ on a $P(A \cap B) \leq P(A) = 0$ d'où $P(A \cap B) = 0$ et on a bien $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

   Supposons A presque sûr. Soit B un événement.

   Comme $A \subset A \cup B$ on a $1 = P(A) \leq P(A \cup B)$ d'où $P(A \cup B) = 1$.

   Or $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$. Donc $P(A \cap B) = P(B) = P(A)P(B)$.

3. *Espérance d'une loi de Poisson*
   Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.
   Donc $P(X = n) = \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^n}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cela définit bien la loi de probabilité d'une variable aléatoire sur $\mathbb{N}$ car $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\lambda}\lambda^n}{n!} = 1$ et les termes de cette somme sont tous positifs.

$$\begin{aligned}
E(X) &= \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} n \frac{\lambda^n}{n!} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{\lambda^n}{n!} \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \\
&= \lambda \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= \lambda \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \\
&= \lambda
\end{aligned}$$

4. *Espérance d'une loi géométrique*
   Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $p > 0$.
   Donc $P(X = n) = p(1-p)^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Cela définit bien la loi de probabilité d'une variable aléatoire sur $\mathbb{N}^*$ car $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} p(1-p)^{n-1} = 1$ et les termes de cette somme sont tous positifs.

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} np(1-p)^{n-1} = p \sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^{n-1}$$

   On pose $f(x) = \dfrac{1}{1-x} = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^n$. On sait que (cours sur les séries entières) :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}$$

   Donc $E(X) = pf'(1-p) = \dfrac{p}{1-(1-p)^2} = \dfrac{1}{p}$.