VI- Probabilités discrètes

A- Espaces probabilisés

c) Conditionnement et indépendance

Si A et B sont deux événements tels que $P(B) > 0$, définition de la probabilité conditionnelle de A sachant B . Notation $P_B(A)$ ou $P(A|B)$.

Formule des probabilités composées. Système complet dénombrable d'événements. Formule des probabilités totales. Formules de Bayes. Indépendance de deux événements. Indépendance mutuelle d'une famille finie d'événements.

B- Variables aléatoires discrètes

a) Généralités

Définition d'une variable aléatoire discrète. Loi d'une variable aléatoire discrète.

Fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle.

Si X prend ses valeurs dans $\{x_n, n \in \mathbb{N}\}$ les x_n étant distincts, et si (p_n) est une suite de réels positifs vérifiant $\sum_{n=1}^{+\infty} p_n = 1$ alors il existe une probabilité P sur $(\Omega, \mathcal{A})$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X = x_n) = p_n$.

Indépendance de deux variables aléatoires. Variables mutuellement indépendantes.

b) Espérance et variance

Espérance d'une variable aléatoire réelle discrète X à valeurs dans un ensemble dénombrable.

Théorème de transfert.

Linéarité de l'espérance. Positivité, croissance.

Si X^2 est d'espérance finie, alors X est elle-même d'espérance finie et dans ce cas, on appelle variance de X le réel :

$$V(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Écart type $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Pour a et b réels, $V(aX + b) = a^2V(X)$.

c) Lois usuelles

Loi de Bernoulli, loi binomiale, loi uniforme, loi géométrique, loi de Poisson.

d) Suite de variables aléatoires

Indépendance mutuelle.

Lemme des coalitions : si $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes et si Y et Z sont deux variables aléatoires s'écrivant $Y = f(X_1, \dots, X_p)$ et $Z = g(X_{p+1}, \dots, X_n)$ où f est une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ et g une fonction de $\mathbb{R}^{n-p}$ dans $\mathbb{R}$ alors ces deux variables sont indépendantes.

Somme de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes.

Questions de cours ou exercice :1. *Espérance et variance d'une loi de Poisson*

Soit X une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

Donc $P(X = n) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Cela définit bien la loi de probabilité d'une variable aléatoire sur $\mathbb{N}$ car $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{e^{-\lambda} \lambda^n}{n!} = 1$ et les termes de cette somme sont tous positifs.

$$\begin{aligned} E(X) &= e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} n \frac{\lambda^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{+\infty} n \frac{\lambda^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{(n-1)!} \\ &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n}{n!} \\ &= \lambda \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(X^2) &= e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{+\infty} n^2 \frac{\lambda^n}{n!} \\ &= e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \lambda^n}{(n-1)!} \\ &= \lambda e^{-\lambda} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n \lambda^{n-1}}{(n-1)!} \\ &= \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) \times \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} \\ &= \lambda E(X+1) = \lambda(\lambda+1) \end{aligned}$$

Donc $V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \lambda$.

2. *Espérance et variance d'une loi géométrique*

Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre $p > 0$.

Donc $P(X = n) = p(1-p)^{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Cela définit bien la loi de probabilité d'une variable aléatoire sur $\mathbb{N}^*$ car $\sum_{n=1}^{+\infty} p(1-p)^{n-1} = 1$ et les termes de cette somme sont tous positifs.

$$E(X) = \sum_{n=1}^{+\infty} np(1-p)^{n-1} = p \sum_{n=1}^{+\infty} n(1-p)^{n-1}$$

On pose $f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$. On sait que (cours sur les séries entières) :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1}$$

Donc $E(X) = pf'(1-p) = \frac{p}{1-(1-p)^2} = \frac{1}{p}$.

$$E(X^2) = \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 p(1-p)^{n-1} = p \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 (1-p)^{n-1}$$

On dérive une deuxième fois f (cours sur les séries entières) :

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f''(x) = \frac{2}{(1-x)^3} = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)x^{n-2}$$

Donc :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n^2 x^{n-2} = \frac{2}{(1-x)^3} + \sum_{n=2}^{+\infty} nx^{n-2}$$

On multiplie par x :

$$\sum_{n=2}^{+\infty} n^2 x^{n-1} = \frac{2x}{(1-x)^3} + \sum_{n=2}^{+\infty} nx^{n-1}$$

On ajoute 1 de chaque côté :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{+\infty} n^2 x^{n-1} &= \frac{2x}{(1-x)^3} + \sum_{n=1}^{+\infty} nx^{n-1} \\ &= \frac{2x}{(1-x)^3} + f'(x) \\ &= \frac{2x}{(1-x)^3} + \frac{1}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

On remplace x par $1-p$:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} n^2 (1-p)^{n-1} = \frac{2(1-p)}{p^3} + \frac{1}{p^2}$$

D'où $E(X) = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p}$ et :

$$V(X) = \frac{2(1-p)}{p^2} + \frac{1}{p} - \frac{1}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

3. Formule des probabilités totales pour un système quasi-complet d'événements

Soit $(A_i)_{i \in \mathbb{N}}$ un système quasi-complet d'événements (savoir ce que c'est !) et B un événement.

Comme $\Omega' = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$ est presque sûr :

$$P(B) = P(B \cap \Omega') = P\left(\bigcup_{i=0}^{+\infty} (B \cap A_i)\right) = \sum_{i=0}^{+\infty} P(B \cap A_i)$$

Savoir justifier que $P(B) = P(B \cap \Omega')$!