VI- Probabilités discrètes

B- Variables aléatoires discrètes

c) Espérance et variance

Espérance d'une variable aléatoire réelle discrète X à valeurs dans un ensemble dénombrable.
Théorème de transfert.
Linéarité de l'espérance. Positivité, croissance.
Si X^2 est d'espérance finie, alors X est elle-même d'espérance finie et dans ce cas, on appelle variance de X le réel :

$$V(X) = E((X - E(X))^2) = E(X^2) - E(X)^2.$$

Écart type $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.
Pour a et b réels, $V(aX + b) = a^2 V(X)$.

d) Suite de variables aléatoires

Indépendance mutuelle.

Lemme des coalitions : si $X_1, \ldots, X_n$ sont indépendantes et si Y et Z sont deux variables aléatoires s'écrivant $Y = f(X_1, \ldots, X_p)$ et $Z = g(X_{p+1}, \ldots, X_n)$ où f est une fonction de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ et g une fonction de $\mathbb{R}^{n-p}$ dans $\mathbb{R}$) alors ces deux variables sont indépendantes.

Somme de variables aléatoires de Bernoulli indépendantes.

VII- Équations différentielles et systèmes différentiels

A- Équations différentielles scalaires d'ordre 1

Revoir le programme de PTSI.

B- Équations différentielles scalaires d'ordre 2

Théorème de Cauchy linéaire : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.

Espace vectoriel des solutions de l'équation homogène $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$ sur un intervalle où a et b sont des fonctions continues à valeurs réelles ou complexes.

Équation avec second membre $y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$. Forme des solutions : somme d'une solution particulière de l'équation avec second membre et de la solution générale de l'équation homogène. Principe de superposition des solutions.

Résolution dans le cas où on connait une solution de l'équation homogène ne s'annulant pas.
Recherche de solutions développables en série entière.

Questions de cours ou exercice :

1. *Expliquer la méthode de résolution d'une équation linéaire d'ordre* 1
   Soit a et b deux fonctions continue sur un intervalle I et (E) l'équation différentielle :

$$y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$$

Les solutions de (E) sont les solutions de la forme $y = y_0 + y_1$ où y_0 est une solution de l'équation homogène $y' + ay = 0$, c'est-à-dire de la forme $t \longmapsto K\exp(-A(t))$ où $K \in \mathbb{R}$ et A est une primitive de a, et y_1 une solution particulière.

2. *Expliquer la méthode de la variation de la constante*

   La méthode de la variation de la constante permet de trouver une solution particulière de l'équation différentielle $y'(t) + a(t)y(t) = b(t)$ où a et b sont des fonctions continues sur un intervalle I.

   On cherche une solution de la forme $y(t) = K(t)\exp(-A(t))$ où K est une fonction dérivable sur I et A une primitive de a.

   En injectant dans (E), il vient :

   $$K'(t)\exp(-A(t)) = b(t).$$

   On obtient ainsi une expression de $K'(t)$, puis en primitivant une expression de $K(t)$. On en déduit une solution particulière.

3. *Énoncer le théorème de Cauchy linéaire pour une équation différentielle d'ordre* 2.

   Soit a, b, c sont trois fonctions continues sur un intervalle I, $t_0 \in I$ et $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$

   Le problème de Cauchy :

   $$\begin{aligned} &\forall t \in I, \quad y''(t) + a(t)y'(t) + b(t)y(t) = c(t) \\ &y(t_0) = \alpha, \quad y'(t_0) = \beta \end{aligned}$$

   admet une unique solution définie sur I.

4. *Le produit de Cauchy pour les séries numériques et les séries entières*

   Revoir la proposition 4.13, l'exercice 4.14 (montrer que $\exp(z) \times \exp(z') = \exp(z + z')$ et la proposition 4.22.