VII- Équations différentielles et systèmes différentiels

A- Équations différentielles scalaires d'ordre 1

Revoir le programme de PTSI.

B- Équations différentielles scalaires d'ordre 2

Théorème de Cauchy linéaire : existence et unicité de la solution d'un problème de Cauchy.

Espace vectoriel des solutions de l'équation homogène $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$ sur un intervalle où a et b sont des fonctions continues à valeurs réelles ou complexes.

Équation avec second membre $y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$. Forme des solutions : somme d'une solution particulière de l'équation avec second membre et de la solution générale de l'équation homogène. Principe de superposition des solutions.

Résolution dans le cas où on connait une solution de l'équation homogène ne s'annulant pas. Recherche de solutions développables en série entière.

VIII- Espaces vectoriels préhilbertiens et euclidiens

A- Structure préhilbertienne

a) Produit scalaire et norme

Produit scalaire. Espace préhilbertien réel, espace euclidien.
Produit scalaire euclidien canonique de $\mathbb{R}^n$.

Exemples de produits scalaires définis par une intégrale sur les espaces de fonctions et de polynômes.

Norme préhilbertienne, distance associée. Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité. Identité du parallélogramme, identité de polarisation.

b) Orthogonalité en dimension quelconque

Vecteurs orthogonaux, sous-espaces orthogonaux. Orthogonal d'un sous-espace vectoriel. Théorème de Pythagore. Famille orthogonale, famille orthonormale.

Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre.

L'algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt n'est pas au programme de cette semaine !

Questions de cours ou exercice :

1. *Définition d'un produit scalaire sur un espace vectoriel*
   Un produit scalaire sur E est une application Φ de E^2 dans $\mathbb{R}$ telle que :
   (i) Pour tout $x \in E$, l'application $y \longmapsto \Phi(x, y)$ est linéaire.
   (ii) Pour tout $y \in E$, l'application $x \longmapsto \Phi(x, y)$ est linéaire.
   (iii) Pour tout $(x, y) \in E^2$, $\Phi(x, y) = \Phi(y, x)$.
   (iv) Pour tout $x \in E$, $\Phi(x, x) \geq 0$ et $\Phi(x, x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$.

2. *Preuve de l'identité du parallélogramme*

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=\|x\|^2+2\langle x,y\rangle+\|y\|^2+\|x\|^2-2\langle x,y\rangle+\|y\|^2=2(\|x\|^2+\|y\|^2)$$

   Être capable de donner tous les détails du développement de $\|x+y\|^2$ et de $\|x-y\|^2$.

3. *Preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwarz*

   Commencer par donner l'inégalité !

   Si $x=0_E$, l'inégalité est évidente (mais il faut être capable de la justifier !)

   On pose $\varphi(t)=\|tx+y\|^2$ qui est positif pour tout $t\in\mathbb{R}$.

$$\varphi(t)=\|x\|^2t^2+2\langle x,y\rangle t+\|y\|^2$$

   Donc φ est polynômiale de degré 2 (car $\|x\|\neq 0$) et de signe constante donc son discriminant est négatif :

$$\Delta=(2\langle x,y\rangle)^2-4\|x\|^2\|y\|^2.$$

   D'où (être capable de détailler) l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

4. *Définition de la norme associée à un produit scalaire. Propriétés de la norme. Preuve de l'inégalité triangulaire.*

   La norme sur E associé au produit scalaire $\langle .,. \rangle$ est définie par $\|x\|=\sqrt{\langle x,x\rangle}$ pour tout x de E.

   Ses propriétés :

   (i) $\forall x\in E,\quad \|x\|=0\Longrightarrow x=0,$

   (ii) $\forall(\lambda,x)\in\mathbb{R}\times E,\quad \|\lambda x\|=|\lambda|.\|x\|.$

   (iii) $\forall(x,y)\in E^3,\quad \|x+y\|\leq\|x\|+\|y\|.$

   Preuve de (iii) :

$$\|x+y\|^2-(\|x\|+\|y\|)^2=2(\langle x,y\rangle-\|x\|\times\|y\|)$$

   C'est négatif car, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\langle x,y\rangle\leq|\langle x,y\rangle|\leq\|x\|\times\|y\|$$