VIII- Espaces vectoriels préhilbertiens et euclidiens

A- Structure préhilbertienne

a) Produit scalaire et norme

Produit scalaire. Espace préhilbertien réel, espace euclidien.
Produit scalaire euclidien canonique de $\mathbb{R}^n$.

Exemples de produits scalaires définis par une intégrale sur les espaces de fonctions et de polynômes.

Norme préhilbertienne, distance associée. Inégalité de Cauchy-Schwarz, cas d'égalité. Identité du parallélogramme, identité de polarisation.

b) Orthogonalité en dimension quelconque

Vecteurs orthogonaux, sous-espaces orthogonaux. Orthogonal d'un sous-espace vectoriel. Théorème de Pythagore. Famille orthogonale, famille orthonormale.

Toute famille orthogonale de vecteurs non nuls est libre. Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

c) Bases orthonormales

Existence de bases orthonormales en dimension finie. Coordonnées d'un vecteur dans une base orthonormale ; expression du produit scalaire et de la norme.

Expression matricielle du produit scalaire et de la norme dans une base orthonormale.

Matrice d'un endomorphisme dans une base orthonormale.

d) Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie

Si F est un sous-espace de dimension finie d'un espace préhilbertien, alors F et $F^\perp$ sont supplémentaires.

Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel F de dimension finie. Expression du projeté orthogonale dans une base orthonormale de F.

Distance d'un vecteur x à un sous-espace vectoriel F de dimension finie.

Le projeté orthogonal de x sur F est l'unique élément de F qui minimise la distance de x à un vecteur de F.

Questions de cours ou exercice :

1. *Définition d'un produit scalaire sur un espace vectoriel*
   Un produit scalaire sur E est une application Φ de E^2 dans $\mathbb{R}$ telle que :
   (i) Pour tout $x \in E$, l'application $y \longmapsto \Phi(x, y)$ est linéaire.
   (ii) Pour tout $y \in E$, l'application $x \longmapsto \Phi(x, y)$ est linéaire.
   (iii) Pour tout $(x, y) \in E^2$, $\Phi(x, y) = \Phi(y, x)$.
   (iv) Pour tout $x \in E$, $\Phi(x, x) \geq 0$ et $\Phi(x, x) = 0 \iff x = 0$.

2. *Preuve de l'identité du parallélogramme*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 + \|x\|^2 - 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

   Être capable de donner tous les détails du développement de $\|x+y\|^2$ et de $\|x-y\|^2$.

3. *Preuve de l'inégalité de Cauchy-Schwarz*

   Commencer par donner l'inégalité !

   Si $x = 0_E$, l'inégalité est évidente (mais il faut être capable de la justifier !)

   On pose $\varphi(t) = \|tx+y\|^2$ qui est positif pour tout $t \in \mathbb{R}$.

$$\varphi(t) = \|x\|^2 t^2 + 2\langle x,y\rangle t + \|y\|^2$$

   Donc φ est polynômiale de degré 2 (car $\|x\| \neq 0$) et de signe constante donc son discriminant est négatif :

$$\Delta = (2\langle x,y\rangle)^2 - 4\|x\|^2\|y\|^2.$$

   D'où (être capable de détailler) l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

4. *Définition de la norme associée à un produit scalaire. Propriétés de la norme. Preuve de l'inégalité triangulaire.*

   La norme sur E associé au produit scalaire $\langle .,. \rangle$ est définie par $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ pour tout x de E.

   Ses propriétés :

   (i) $\forall x \in E, \quad \|x\| = 0 \Longrightarrow x = 0,$

   (ii) $\forall (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times E, \quad \|\lambda x\| = |\lambda|.\|x\|.$

   (iii) $\forall (x,y) \in E^3, \quad \|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

   Preuve de (iii) :

$$\|x+y\|^2 - (\|x\| + \|y\|)^2 = 2(\langle x,y\rangle - \|x\| \times \|y\|)$$

   C'est négatif car, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\langle x,y\rangle \leq |\langle x,y\rangle| \leq \|x\| \times \|y\|$$