# Maths - DS4 - 4 heures

## Exercice

On considère l'ensemble $\mathcal{N}$ des matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ de la forme $N = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, où $a$, $b$, $c$ sont trois réels. On considère également l'ensemble $\mathcal{U}$ des matrices dites unipotentes de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ qui s'écrivent $U = I + N$, où $N \in \mathcal{N}$ et $I$ est la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

Autrement dit $U \in \mathcal{U}$ s'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ tel que $U = \begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Étude d'une matrice semblable à une matrice unipotente.
   On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   (a) Vérifier que le polynôme caractéristique de $A$ est $\chi_A(x) = (x-1)^3$.
   (b) La matrice $A$ est-elle diagonalisable ? On demande une réponse sans calcul.
   (c) Déterminer les sous-espaces propres de $A$.
   (d) Résoudre l'équation $(A - I)X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ d'inconnue $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.
   (e) On note $f$ l'endomorphisme canoniquement associé à la matrice $A$. Déterminer trois vecteurs $e_1, e_2$ et $e_3$ de $\mathbb{R}^3$ tels que

$$f(e_1) = e_1, \quad f(e_2) = e_1 + e_2, \quad \text{et} \quad f(e_3) = e_1 - 2e_2 + e_3$$

   On pourra utiliser la question précédente.
   (f) En déduire une matrice $P$ telle que $A = PBP^{-1}$.

2. Étude de $\mathcal{N}$.
   (a) Montrer que $\mathcal{N}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. En donner une base et sa dimension.
   (b) Montrer que $\mathcal{N}$ est stable par produit, c'est-à-dire que pour tout $(N, M) \in \mathcal{N}^2$, on a $NM \in \mathcal{N}$.

   (c) Calculer $N^3$ pour $N \in \mathcal{N}$.

3. Étude de $\mathcal{U}$.
   (a) L'ensemble $\mathcal{U}$ est-il un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ ? On justifiera la réponse.
   (b) Montrer que $\mathcal{U}$ est stable par produit.
   (c) Montrer que $\mathcal{U} \subset GL_3(\mathbb{R})$ où $GL_3(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

4. Soit $U \in \mathcal{U}$ et $N \in \mathcal{N}$ telles que $U = I + N$. Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on définit la matrice $U^{(\alpha)}$ par

$$U^{(\alpha)} = I + \alpha N + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} N^2$$

   On prendra garde au fait que $U^{(\alpha)}$ est une notation : il ne s'agit pas d'une puissance. Nous allons montrer dans la suite que cette notation est cohérente avec celle connue pour les puissances.

   (a) Calculer $B^{(\alpha)}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$ où $B$ est la matrice définie à la question 1.
   (b) Vérifier que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}, U^{(\alpha)} \in \mathcal{U}$.
   (c) Montrer que pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$U^{(\alpha)} U^{(\beta)} = U^{(\alpha+\beta)} \quad \text{et} \quad \left(U^{(\alpha)}\right)^{(\beta)} = U^{(\alpha\beta)}$$

   (d) En déduire que $U^{(n)} = U^n$, c'est-à-dire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, U^{(n)} = \underbrace{U \times \ldots \times U}_{n \text{ fois}}$
   (e) Retrouver que $U^{(n)} = U^n$ pour $n \geqslant 2$ en utilisant la formule du binôme de Newton. Qu'en est-il pour $n = 0$ et $n = 1$ ?
   (f) Montrer que $\left(U^{(1/2)}\right)^2 = U$.

5. (a) En utilisant les résultats de la question 4, expliciter une matrice $C \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $C^2 = B$. Cette matrice est-elle unique ?
   (b) En déduire comment déterminer une matrice $D \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $D^2 = A$ (on ne calculera pas explicitement la matrice $D$ ).

# Problème

**Partie 1**

1. Rappeler le domaine de définition de la fonction tangente, puis donner, sans démonstration, sa parité et sa dérivée, ainsi que, pour sa restriction à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ ses variations (on demande le tableau de variations, où apparaîtront les limites aux bornes).
2. Montrer, à l'aide d'un théorème de cours qui sera énoncé, que la fonction tangente réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbb{R}$, et en déduire l'existence de sa fonction réciproque arctangente. Donner, sans démonstration, la dérivée de la fonction arctangente.

3. Déduire des variations de la fonction tangente sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ celles de sa réciproque arctangente, et retrouver ce résultat à l'aide de la dérivée de la fonction arctangente obtenue à la question précédente.
4. Tracer, sur un même graphe (échelle : 2 cm ou 2 carreaux pour une unité), les courbes représentatives de la fonction tangente sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, et de la fonction arctangente sur $\mathbb{R}$. On rappellera comment le tracé de la courbe représentative de la fonction arctangente se déduit de celui de la fonction tangente.

## Partie 2

5. (a) Soit $R$ un réel strictement positif, et $f$ et $g$ deux fonctions développables en série entière sur $]-R, R[$, sous la forme :

$$\forall x \in ]-R, R[: \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n \quad , \quad g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$$

   où, pour tout entier naturel $n, a_n$ et $b_n$ sont des réels.

   Rappeler la formule du produit de Cauchy donnant le produit des séries entières $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n$.

   Que peut-on dire sur le rayon de convergence ?

   (b) Appliquer la question précédente pour exprimer, pour tout réel $x$ de $]-R, R$, le développement en série entière de $(f(x))^2$.

6. On suppose désormais que la fonction $f$ s'annule en zéro, et que, pour tout réel $x$ de $]-R, R[$ :

$$f'(x) = 1 + (f(x))^2$$

   (a) En déduire la relation de récurrence vérifiée, pour tout entier naturel $n$, par les coefficients $a_n$.

   (b) Démontrer, par récurrence forte, que, pour tout entier naturel $p$ :

$$a_{2p} = 0$$

   Que peut-on en déduire pour la parité de la fonction $f$ et son développement en série entière ?

   (c) Montrer que $f'(0) = 1$, puis calculer : $a_1, a_3, a_5, a_7$.

   (d) On admettra, dans ce qui suit, que la fonction tangente est développable en série entière sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

   A l'aide des résultats précédents, donner le développement limité, à l'ordre 7 , au voisinage de zéro, de la fonction $f$, et en déduire celui de la fonction tangente, au même ordre, en zéro.

**Partie 3**

Soit $\varphi$ la fonction définie, pour tout réel non nul $x$, par :

$$\varphi(x) = \frac{\mathrm{e}^x - 1}{x}$$

7. Montrer que $\varphi$ est prolongeable par continuité en zéro.

Dans ce qui suit, on désigne encore par $\varphi$ la fonction ainsi prolongée.

8. Montrer que $\varphi$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.

On admettra que la fonction $1/\varphi$ est développable en série entière sur $]-2\pi, 2\pi[$, sous la forme :

$$\forall x \in ]-2\pi, 2\pi[: \quad \frac{1}{\varphi(x)} = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n \frac{x^n}{n!}$$

où, pour tout entier naturel $n, B_n$ est un coefficient réel.

9. Que vaut $B_0$ ?
10. En remarquant que, pour tout réel $x$ de $]-2\pi, 2\pi[$ :

$$x = (\mathrm{e}^x - 1) \sum_{n=0}^{+\infty} B_n \frac{x^n}{n!}$$

montrer que l'on peut aussi écrire :

$$x = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} B_k \right) \frac{x^n}{n!}$$

11. Montrer que, pour tout entier naturel non nul $n$ :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} B_k = 0$$

puis :

$$(n+1)B_n = -\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k$$

12. Calculer $2B_2$ et $4B_4$. Que remarque-t-on par rapport aux coefficients $a_3$ et $a_5$ de la partie 2 ?