Maths DS5 - 4 heures

Problème

Préambule

1. On considère la fonction définie pour tout $x \in]-1,1[$:
$$F(x) = \int_0^x \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t.$$
   (a) Soit $x \in]-1,1[$. Justifier que $F(x)$ est bien définie et calculer $F(x)$ à l'aide du changement de variable $t = \sin u$.
   (b) En déduire une primitive de la fonction $t \longmapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t^2}}$.
2. Soit $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\sin t\,\mathrm{d}t$.
   (a) Calculer $\displaystyle\int_0^x \mathrm{e}^{(\mathrm{i}-1)t}\,\mathrm{d}t$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (b) En déduire une primitive de la fonction $x \longmapsto \mathrm{e}^{-x}\sin x$.
   (c) Montrer que l'intégrale I est convergente et donner sa valeur.

Partie A

3. Donner la solution générale sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle :
$$(\mathcal{E}_0) \qquad (1-x^2)y'(x) - xy(x) = 0$$
4. À l'aide de la méthode de la variation de la constante, donner la solution générale sur $]-1,1[$ de l'équation différentielle :
$$(\mathcal{E}_1) \qquad (1-x^2)y'(x) - xy(x) = 1$$
5. On note F la fonction définie par :
$$\forall x \in]-1,1|, \quad F(x) = \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \arctan\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}.$$
   On pose $u\ : x \longmapsto \arctan\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$.
   (a) Pour tout $x \in]-1,1[$, vérifier que $F(x) = 4u'(x) \times u(x)$ et que $u''(x) = \dfrac{xu'(x)}{1-x^2}$.
   (b) Montrer que la fonction F vérifie l'équation différentielle $(\mathcal{E}_1)$.
   (c) En déduire une expression de F simplifiée avec la fonction arcsinus.

Partie B

Dans cette partie, on cherche une solution développable en série entière sur un domaine $]-R,R[\subset \mathbb{R}$, $R>0$, de l'équation différentielle :

$$(\mathcal{E}_R) \qquad (1-x^2)y'(x)-xy(x)=1, \quad \forall x\in]-R,R[$$

sous la forme :

$$y(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}a_nx^n, \quad \forall x\in]-R,R[$$

où $a_n\in\mathbb{R}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

6. Montrer que $a_1=1$.
7. Montrer que $a_{n+2}=\dfrac{n+1}{n+2}a_n$ pour tout $n\geqslant 0$.
8. Déterminer a_{2p} pour tout $p\geqslant 1$ si $a_0=0$.
9. Exprimer a_{2p+1} en fonction de a_{2p-1}. En déduire une expression de a_{2p+1} en fonction de p.
10. Montrer que la fonction $x\longmapsto(\arcsin x)^2$ est développable en série entière. On précisera le rayon de convergence et les théorèmes utilisés.

Partie C

On pose, pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$w_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin t)^n\,\mathrm{d}t.$$

On considère la série entière :

$$G(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}w_nx^n.$$

On note R son rayon de convergence.

11. Justifier que la suite (w_n) est décroissante, minorée et que $R\geqslant 1$.
12. Montrer que $w_{n+2}=\dfrac{n+1}{n+2}w_n$ pour tout $n\geqslant 0$.
13. En déduire que G est solution de l'équation différentielle $(\mathcal{E}_R)$. Puis que $G(x)=F(x)$ pour tout $x\in]-1,1[$.
14. Soit $x\in]-1,1[$ et $N\geqslant 0$.

    (a) Montrer que :

    $$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1-x\cos t}\,\mathrm{d}t-\sum_{n=0}^{N}w_nx^n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(x\cos t)^{N+1}}{1-x\cos t}\,\mathrm{d}t.$$

    (b) Montrer que :

    $$\left|\frac{(x\cos t)^{N+1}}{1-x\cos t}\right|\leqslant\frac{|x|^{N+1}}{1-|x|}$$

    (c) En déduire que :

    $$G(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{1-x\cos t}\,\mathrm{d}t.$$

15. Montrer que :
$$1 \leqslant \frac{w_n}{w_{n+1}} \leqslant \frac{w_{n-1}}{w_{n+1}}.$$
En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{w_n}{w_{n+1}}$.
16. Montrer que $(n+1)w_n w_{n+1} = \frac{\pi}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ (on pourra raisonner par récurrence).
17. En déduire un équivalent de w_n et la valeur de R.

Exercice

Soient n et N deux entiers naturels non nuls. On lance successivement n boules au hasard dans N cases numérotées de 1 à N. On suppose que les différents lancers sont indépendants et que la probabilité pour qu'une boule tombe dans une case donnée est $\frac{1}{N}$. Une case peut contenir plusieurs boules. On note T_n le nombre de cases **non vides** (donc contenant au moins un boule) à l'issue des n lancers.

1. Donner la loi de T_1, de T_2. Calculer leurs espérances.
2. Déterminer (en fonction de n et N) les valeurs prises par la variable T_n (on distinguera 2 cas : $n \leqslant N$ et $n > N$).
3. On fixe maintenant $n \geqslant 2$. Calculer
$$P(T_n = 1), \quad P(T_n = 2), \quad P(T_n = n)$$
4. À l'aide de la formule des probabilités totales, montrer que, pour tout entier $k \geqslant 1$:
$$P(T_{n+1} = k) = \frac{k}{N} P(Tn = k) + \frac{N-k+1}{N} P(T_n = k-1)$$
5. Pour $1 \leqslant i \leqslant n$, on note X_i le numéro de la case dans laquelle la i-ième boule tombe. Pour $1 \leqslant k \leqslant N$, on note Y_k le nombre de boules que contient la case numéro k, et Z_k la variable valant 0 si la boîte k est vide, et 1 si la boîte k contient au moins une boule.
   (a) Exprimer Y_k en fonction des variables $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$.
   (b) En déduire la loi de Y_k, puis celle de Z_k.
   (c) Les variables aléatoires $(Z_k)_{1\leqslant k\leqslant N}$ sont-elles mutuellement indépendantes ?
   (d) Exprimer T_n en fonction des variables aléatoires $(Z_k)_{1\leqslant k\leqslant N}$ En déduire une expression de l'espérance de T_n.
6. À l'aide de la question 4, retrouver l'espérance de T_n.