Maths - Concours blanc - 4 heures

Partie 1

Pour tout entier naturel n, on note $\mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.
Soit φ l'application définie sur $(\mathbb{R}_3[X])^2$ par :

$$\forall (P,Q) \in (\mathbb{R}_3[X])^2, \varphi(P,Q) = \sum_{k=0}^{3} P(k)Q(k)$$

On considère également les polynômes $L_p(X) = \prod_{\substack{k=0 \\ k\neq p}}^{3} \frac{X-k}{p-k}$ pour $p \in \{0;1;2;3\}$.

1. (a) Vérifier que $L_0(X) = -\frac{1}{6}(X-1)(X-2)(X-3)$.
   (b) Ecrire de même $L_1(X), L_2(X)$ et $L_3(X)$.
   (c) Déterminer les valeurs de $L_p(k)$ pour tout $(p,k) \in [\![0;3]\!]^2$.
2. (a) Démontrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_3[X]$.
   On notera $\| \ \|$ la norme associée.
   (b) Vérifier que (L_0, L_1, L_2, L_3) est une base orthonormée de $\mathbb{R}_3[X]$ pour ce produit scalaire.
   (c) Soit Q un polynôme de $\mathbb{R}_3[X]$. Exprimer en fonction de Q, les coordonnées de Q dans la base (L_0, L_1, L_2, L_3).
3. Déterminer une base orthonormée (e_1, e_2) de $\mathbb{R}_1[X]$ pour le produit scalaire φ.

L'espace affine euclidien $\mathbb{R}^2$ est muni de sa structure euclidienne usuelle et d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.
On considère désormais 6 réels a, b, y_0, y_1, y_2 et y_3 et la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = ax + b$. Pour tout $p \in [\![0;3]\!]$, on note M_p le point de coordonnées (p, y_p), N_p le point de $\mathcal{D}$ dont l'abscisse est p et d_p la longueur du segment $[M_pN_p]$.

On pose alors $\delta(a,b) = \sum_{p=0}^{3} d_p^2$.
L'objectif est de déterminer les valeurs de a et b (si elles existent) pour lesquelles $\delta(a,b)$ est minimale.

4. Faire, sur la copie, un schéma qui illustre les données précédentes.
5. Vérifier que $\delta(a,b) = \sum_{p=0}^{3} (y_p - ap - b)^2$.
6. (a) Démontrer qu'il existe un unique polynôme Q de $\mathbb{R}_3[X]$ dont le graphe passe par les points M_0, M_1, M_2 et M_3.
   On pourra utiliser les polynômes L_p pour $p \in [\![0;3]\!]$.
   (b) Démontrer que $\delta(a,b) = \|Q-H\|^2$ où $H(X) = aX + b$.

(c) En évoquant la distance d'un vecteur à un espace vectoriel bien choisi, en déduire l'existence d'un minimum pour δ et que celui-ci est atteint en un unique polynôme H_0.
On précisera le lien entre Q et H_0.

7. (a) Exprimer H_0 en fonction de φ, Q et des polynômes e_1 et e_2 obtenus dans la question 3.
   (b) Exprimer H_0 en fonction de $s_1 = \displaystyle\sum_{p=0}^{3} y_p$ et $s_2 = \displaystyle\sum_{p=0}^{3} p y_p$.

Partie 2

Soit M une matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On note $M^\top$ sa transposée, $\mathrm{tr}(M)$ sa trace et $\det(M)$ son déterminant.

Un sous-espace vectoriel F de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ est dit stable par produit si pour toutes matrices M et N de F, le produit MN appartient à F.

Soient a, b et c trois réels. On note $M(a,b,c)$ la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & a \end{pmatrix}$ et $f_{a,b,c}$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ canoniquement associé à $M(a,b,c)$.
E désigne l'ensemble des matrices $M(a,b,c)$ et $\mathcal{E}$ l'ensemble des endomorphismes $f_{a,b,c}$ lorsque (a,b,c) parcourt $\mathbb{R}^3$.
Enfin, on note $I = M(1,0,0)$, $J = M(0,1,0)$ et $K = M(0,0,1)$.

1. (a) Démontrer que E est un espace vectoriel dont on donnera une base et la dimension.
   (b) Donner une base d'un supplémentaire de E dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. On considère la fonction φ définie sur $(\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^2$ par :
$$\forall (M,N) \in (\mathcal{M}_2(\mathbb{R}))^2, \quad \varphi(M,N) = \mathrm{tr}(M^\top N)$$
   (a) Démontrer que φ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Vérifier que les matrices I et $J+K$ sont deux vecteurs orthogonaux pour le produit scalaire φ.
   (c) Déterminer le projeté orthogonal de la matrice K sur le sous-espace vectoriel G engendré par les matrices I et $J+K$. En déduire la distance K à G.
   (d) En effectuant un minimum de calculs supplémentaires, donner une base orthonormée de E.
   (e) Déterminer le supplémentaire orthogonal de E dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
3. Dans cette question, on pose $\alpha = \sqrt{|bc|}$ et on suppose que $(b,c) \neq (0,0)$.
   (a) Déterminer les valeurs propres réelles ou complexes de la matrice $M(a,b,c)$.
   On les exprimera en fonction de a et α et on discutera suivant le signe de bc.
   (b) On suppose que $\alpha \neq 0$. La matrice $M(a,b,c)$ est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$? Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$?
   (c) On suppose que $\alpha = 0$. La matrice $M(a,b,c)$ est-elle diagonalisable dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$? Dans $\mathcal{M}_2(\mathbb{C})$?
4. Soit p un projecteur appartenant à $\mathcal{E}$ distinct de l'identité et de l'application nulle.
Il existe donc deux droites vectorielles distinctes D_1 et D_2 telles que p soit le projecteur sur D_1 parallèlement à D_2.

(a) Écrire la matrice de p dans une base adaptée à la décomposition $\mathbb{R}^2 = D_1 \oplus D_2$.
En déduire les valeurs propres, la trace et le déterminant de p.

(b) En déduire quelles sont les matrices $M(a,b,c)$ pour lesquelles $f_{a,b,c}$ est un projecteur (distinct de l'identité et de l'application nulle).

(c) Préciser quels sont les projecteurs orthogonaux de $\mathcal{E}$ et en donner les éléments caractéristiques.

5. Le produit de deux matrices de E est-il toujours une matrice de E ?

6. L'objectif de cette question est de déterminer les droites vectorielles Δ de E qui sont stables par produit. Soit Δ une droite vectorielle engendrée par $M_0 = M(a_0, b_0, c_0)$.
   (a) Démontrer que Δ est stable par produit si et seulement si $M_0^2 \in \Delta$.
   (b) On suppose que $M_0^2 \in \Delta$.
      i. Justifier qu'il existe un réel λ tel que $M_0^2 = \lambda M_0$.
      ii. Démontrer que si $\lambda = 0$, alors M_0 est proportionnelle à J ou K.
      iii. On suppose que $\lambda \neq 0$. On pose $M_0' = \dfrac{1}{\lambda} M_0$. Démontrer que M_0' est la matrice canoniquement associée à un projecteur.
   (c) Conclure

7. L'objectif de cette question est de déterminer les plans vectoriels de E stables par produit.
   (a) Vérifier que le plan vectoriel engendré par I et J est stable par produit.
   (b) Le plan vectoriel engendré par J et K est-il stable par produit ?
   (c) Vérifier que l'ensemble des matrices symétriques de E est un plan vectoriel stable par produit.
   (d) Soit $(b,c) \neq (0,0)$. Démontrer que le sous-espace vectoriel engendré par I et $bJ + cK$ est stable par produit.
   (e) Démontrer que les seuls plans vectoriels de E stables par produit sont ceux de la question précédente.