Maths - Interrogation 4 - 45 min

Exercice 1

1. Montrer, sans chercher de primitive, que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ est convergente.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$.
3. Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^3\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ est convergente et calculer sa valeur à l'aide d'une intégration par parties.
4. Justifier brièvement que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^7\,\mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$ est convergente et déterminer sa valeur.

Exercice 2 Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{\sqrt{n+1}}{n^3}$$

1. Étudier la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} a_n$.
2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.
3. Soit f la fonction $x \longmapsto \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} a_n x^n$.
   (a) Justifier que f est dérivable sur $]-1,1[$. Exprimer de $f'(x)$ à l'aide d'une série, pour tout $x \in]-1,1[$. Que vaut $f'(0)$?
   (b) Montrer que f est continue sur $[-1,1]$.
4. Soit g la fonction $x \longmapsto \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$. Exprimer $g(x)$ pour tout $x \in]-1,1[$ à l'aide d'une série (sans intégrale).