VIII- Espaces vectoriels préhilbertiens et euclidiens

B- Isométries d'un espace euclidien

b) Matrices orthogonales

Une matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si $MM^\top = I_n$.
Caractérisation à l'aide des colonnes ou des lignes de M. Groupe orthogonal.
Si $\mathcal{B}_0$ est une base orthonormale de E, une base $\mathcal{B}$ de E est orthonormale si et seulement si la matrice de passage de $\mathcal{B}_0$ à $\mathcal{B}$ est orthogonale.
Si $\mathcal{B}$ est une base orthonormale de E et u un endomorphisme de E, alors u est une isométrie vectorielle de E si et seulement si $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est orthogonale.
Déterminant d'une matrice orthogonale, d'une isométrie vectorielle.
Isométrie vectorielle positive, isométrie vectorielle négative.
Groupe spécial orthogonal.

c) Matrices symétriques réelles

Matrice symétrique réelle. Les sous-espaces propres d'une matrice symétrique réelle sont deux à deux orthogonaux.
Pour toute matrice symétrique réelle A, il existe une matrice orthogonale P et une matrice diagonale D telles que $A = PDP^{-1}$.

d) Description des isométries des espaces euclidiens orientés de dimension 2 et 3

Orientation d'un espace euclidien de dimension 2 ou 3. Base directe, base indirecte.

Description des isométries du plan et de l'espace à partir des éléments propres des matrices de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ et de $\mathcal{O}_3(\mathbb{R})$.

IX- Fonctions de deux ou trois variables

A- Fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$

a) Norme dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$

Norme d'un vecteur. Boule ouverte, boule fermée. Parties ouvertes, parties fermées, parties bornées. Point intérieur, point extérieur, point intérieur, point adhérent, frontière.

b) Limites et continuité

Limite en un point adhérent. Continuité en un point. Continuité sur une partie. Opérations sur les fonctions continues.

Toute fonction réelle continue sur une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^p$ est bornée et atteint ses bornes.

c) Dérivées partielles

Dérivées partielles d'ordre 1 en un point intérieur. Gradient. Point critique. Fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert. Formule de Taylor-Young à l'ordre 1 pour une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert.
Dérivation de $t \longmapsto f(x_1(t), \dots, x_p(t))$.

Questions de cours :

1. *Définition du gradient d'une fonction de deux variables, d'un point critique. Donner la dérivée de la fonction* $t \longmapsto f(x_1(t), x_2(t))$.

   Écrire la formule de Taylor Young à l'ordre 1 *pour une fonction de* 2 *variables.*

2. *Montrer que les sous-espaces propres d'une matrice symétrique sont deux à deux orthogonaux.*

   Soit A une matrice symétrique, λ et μ deux valeurs propres distinctes de A. Soit $X \in E_\lambda(A)$ et $Y \in E_\mu(A)$.
   On a
   $$\langle AX, Y\rangle = (AX)^\top Y = X^\top A^\top Y = X^\top AY = \langle X, AY\rangle$$
   Mais aussi $AX = \lambda X$ et $AY = \mu Y$, donc :
   $$\lambda\langle X, Y\rangle = \mu\langle X, Y\rangle$$
   Donc $\langle X, Y\rangle = 0$. On en déduit que $E_\lambda(A)$ et $E_\mu(A)$ sont orthogonaux.

3. *Montrer que la matrice d'une isométrie positive de* $\mathbb{R}^2$ *dans une base orthonormée est de la forme* $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$

   Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de $\mathbb{R}^2$, u une isométrie de $\mathbb{R}^2$ et $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ sa matrice dans la base $\mathcal{B}$.
   La matrice A est orthogonale et son déterminant vaut 1. Donc $a^2 + c^2 = 1$ et $b^2 + d^2 = 1$.
   Soit θ et α tels que $a = \cos\theta$, $c = \sin\theta$, $b = \cos\alpha$ et $d = \sin\alpha$.
   Comme $ad - bc = 1$, on a $\alpha = \theta + \frac{\pi}{2}$, ce qui permet de conclure.