VIII- Espaces vectoriels préhilbertiens et euclidiens

d) Description des isométries des espaces euclidiens orientés de dimension 2 et 3

Orientation d'un espace euclidien de dimension 2 ou 3. Base directe, base indirecte.

Description des isométries du plan et de l'espace à partir des éléments propres des matrices de $\mathcal{O}_2(\mathbb{R})$ et de $\mathcal{O}_3(\mathbb{R})$.

IX- Fonctions de deux ou trois variables

A- Fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$

a) Norme dans $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$

Norme d'un vecteur. Boule ouverte, boule fermée. Parties ouvertes, parties fermées, parties bornées. Point intérieur, point extérieur, point intérieur, point adhérent, frontière.

b) Limites et continuité

Limite en un point adhérent. Continuité en un point. Continuité sur une partie. Opérations sur les fonctions continues.

Toute fonction réelle continue sur une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^p$ est bornée et atteint ses bornes.

c) Dérivées partielles

Dérivées partielles d'ordre 1 en un point intérieur. Gradient. Point critique. Fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert. Formule de Taylor-Young à l'ordre 1 pour une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un ouvert.

Dérivation de $t \longmapsto f(x_1(t), \ldots, x_p(t))$.

Dérivées partielles d'ordre 2 en un point intérieur. Fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert. Théorème de Schwarz.

d) Extrémums d'une fonction de deux variables

Extrémum local, extrémum global. Lien avec les points critiques. Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 pour une fonction de deux variables de classe $\mathcal{C}^2$. Matrice hessienne. Nature d'un point critique lorsque la matrice hessienne est inversible.

Exemples de recherche de maximums ou minimums locaux, de points cols. Exemples de recherche d'extrémums globaux sur une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$.

B- Courbes planes définies par une équation

a) Les coniques

Directrice, foyer, excentricité d'une conique.

Équation réduite obtenue grâce à la diagonalisation d'une matrice symétrique dans une base orthonormée. Classification : ellipse, parabole, hyperbole. Axes de symétrie, demi-axes d'une ellipse, asymptotes d'une hyperbole.

Ensemble des points de coordonnées (x, y) du plan vérifiant une équation du type :

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

où $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

Questions de cours ou exercice :

1. *Définition des coniques avec directrice, foyer, excentricité. Nature de la conique (parabole, ellipse, hyperbole) suivant les valeurs de l'excentricité.*

   Expliquer, sur une figure, comment construire point par point une parabole connaissant la directrice et le foyer.

   Soit $\mathcal{D}$ une droite, F un point n'appartenant pas $\mathcal{D}$ et e un réel strictement positif.

   La conique de directrice $\mathcal{D}$, de foyer F et d'excentricité e est l'ensemble des points M du plan tels que $\dfrac{MF}{MH} = e$ où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathcal{D}$.

   Si $e < 1$, la conique est une ellipse.
   Si $e = 1$, la conique est une parabole. Dans ce cas, tout point M de la parabole est la médiatrice de $[FH]$, ce qui permet de construire point par point la courbe.
   Si $e > 1$, la conique est une hyperbole.

2. *Équation réduite d'une parabole et d'une ellipse et représentation graphique. Donner un paramétrage de l'ellipse*
   Une parabole est une courbe plane admettant une équation de la forme $y^2 = 2px$ dans un repère orthonormée. Son sommet est l'origine de ce repère et son axe est l'axe des ordonnées (la droite d'équation $y = 0$).

   Une ellipse est une courbe plane admettant une équation, dans un repère orthonormée, de la forme $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ où a et b sont des réels strictement positifs avec $a > b$ (si $a = b$, ce n'est pas une ellipse, c'est un cercle !). Les axes de l'ellipse sont les axes de coordonnées du repère.

   L'ellipse admet pour paramétrage :

$$\begin{cases} x &= a\cos t \\ y &= b\sin t \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

3. *Équation réduite d'une hyperbole, paramétrage dans le demi-plan $x \geq 0$. Asymptotes*
   Une hyperbole est une courbe plane admettant, dans un repère orthonormée, une équation de la forme $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ où a et b sont des réels strictement positifs.

   La branche d'hyperbole dans le demi-plan $x > 0$ admet pour paramétrage :

$$\begin{cases} x &= a\cosh t \\ y &= b\sinh t \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

   On a $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{b}{a}$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} y(t) - \frac{b}{a}x(t) = 0$ (être capable de détailler les calculs de limite !). Donc la droite d'équation $\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = 0$ est asymptote ainsi que, par symétrie, la droite d'équation $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 0$ est également asymptote.