IX- Fonctions de deux ou trois variables

d) Extrémums d'une fonction de deux variables

Extrémum local, extrémum global. Lien avec les points critiques. Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 pour une fonction de deux variables de classe $\mathcal{C}^2$. Matrice hessienne. Nature d'un point critique lorsque la matrice hessienne est inversible.

Exemples de recherche de maximums ou minimums locaux, de points cols. Exemples de recherche d'extrémums globaux sur une partie fermée bornée de $\mathbb{R}^2$.

B- Courbes planes définies par une équation

a) Les coniques

Directrice, foyer, excentricité d'une conique.
Équation réduite obtenue grâce à la diagonalisation d'une matrice symétrique dans une base orthonormée. Classification : ellipse, parabole, hyperbole. Axes de symétrie, demi-axes d'une ellipse, asymptotes d'une hyperbole.
Ensemble des points de coordonnées (x, y) du plan vérifiant une équation du type :

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0,$$

où $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

b) Courbes du plan définies par une équation cartésienne

Courbe du plan définie par une équation $f(x, y) = 0$ où f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$. Point régulier. Équation de la tangente en un point régulier.

En un point où il est non nul, le gradient de f est orthogonal aux lignes de niveau $f(x, y) = \lambda$ et orienté dans le sens des valeurs croissantes de f.

X- Courbes et surfaces dans l'espace

A-Fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$

a) Limite et continuité

Limite en un point adhérent. Continuité en un point. Continuité sur une partie de $\mathbb{R}^p$.
Caractérisation par les fonctions coordonnées.

b) Dérivées partielles

Dérivées partielles d'ordres 1 et 2. Fonctions de classe $\mathcal{C}^1$, de classe $\mathcal{C}^2$. Expression coordonnée par coordonnée.

B- Applications à la géométrie

a) Courbes et surfaces de $\mathbb{R}^3$ paramétrées

Courbe paramétrée par une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$: $t \longmapsto M(t)$.
Surface paramétrée par une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$: $(u, v) \longmapsto M(u, v)$.

Point régulier d'une courbe paramétrée, d'une surface paramétrée.
Tangente en un point régulier d'une courbe paramétrée de $\mathbb{R}^3$.
Courbes coordonnées d'une surface paramétrée. Courbes tracées sur une surface paramétrée. Sections planes. Plan tangent, droite normale en un point régulier d'une surface paramétrée. Base du plan tangent.
Surface réglée. Génératrices. Le plan tangent en un point régulier contient la génératrice passant par ce point.

Questions de cours ou exercice :

1. *Équation réduite d'une parabole et d'une ellipse et représentation graphique. Donner un paramétrage de l'ellipse*
   Une parabole est une courbe plane admettant une équation de la forme $y^2 = 2px$ dans un repère orthonormée. Son sommet est l'origine de ce repère et son axe est l'axe des ordonnées (la droite d'équation $y = 0$).

   Une ellipse est une courbe plane admettant une équation, dans un repère orthonormée, de la forme $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ où a et b sont des réels strictement positifs avec $a > b$ (si $a = b$, ce n'est pas une ellipse, c'est un cercle !). Les axes de l'ellipse sont les axes de coordonnées du repère.

   L'ellipse admet pour paramétrage :

$$\begin{cases} x &= a\cos t \\ y &= b\sin t \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

2. *Équation réduite d'une hyperbole, paramétrage dans le demi-plan $x \geq 0$. Asymptotes*
   Une hyperbole est une courbe plane admettant, dans un repère orthonormée, une équation de la forme $\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ où a et b sont des réels strictement positifs.

   La branche d'hyperbole dans le demi-plan $x > 0$ admet pour paramétrage :

$$\begin{cases} x &= a\cosh t \\ y &= b\sinh t \end{cases}, \qquad t \in \mathbb{R}$$

   On a $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = \frac{b}{a}$ et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} y(t) - \frac{b}{a}x(t) = 0$ (être capable de détailler les calculs de limite !). Donc la droite d'équation $\dfrac{x}{a} - \dfrac{y}{b} = 0$ est asymptote ainsi que, par symétrie, la droite d'équation $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 0$ est également asymptote.

3. Point régulier d'une surface de $\mathbb{R}^3$ paramétrée par une fonction $t \longmapsto f(t)$. Équation du plan tangent en un point à cette surface.

4. Qu'est-ce qu'une surface réglée ? Méthode pour montrer qu'une surface est réglée.