X- Courbes et surfaces dans l'espace

B- Applications à la géométrie

b) Surfaces définies par une équation cartésienne

Surface définie par une équation $f(x, y, z) = 0$ avec f de classe $\mathcal{C}^1$. Équation du plan tangent en un point régulier. Tangente à l'intersection de deux surfaces en un point où les plans tangents sont distincts.

c) Exemples de surfaces

Surface réglée. Génératrices. Le plan tangent en un point régulier contient la génératrice passant par ce point. Surface de révolution. Axe, méridiennes, parallèles.
Exemples de génération de surfaces, de recherche de paramétrages et d'équations cartésiennes (surfaces de révolution, surfaces réglées).

XI- Intégrale dépendant d'un paramètre

a) Suites et séries d'intégrales

Étude de suite d'intégrales (monotonie, convergence, calcul à l'aide d'intégration par parties successives).
Théorème d'intégration terme à terme.

b) Théorème de continuité

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$, et f une fonction réelle ou complexe définie sur $I \times J$, telle que :

(i) pour tout $x \in I$, la fonction $t \longmapsto f(x, t)$ est continue sur J ;
(ii) pour tout $t \in J$, la fonction $x \longmapsto f(x, t)$ est continue sur I ;
(iii) il existe une fonction φ positive, continue et intégrable sur J, telle que :

$$\forall (x, t) \in I \times J, \quad |f(x, t)| \leq \varphi(t),$$

(hypothèse de domination).

Alors la fonction $x \longmapsto \int_J f(x, t)dt$ est continue sur I.

c) Théorème de dérivation

Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et f une fonction réelle ou complexe définie sur $I \times J$, telle que :

(i) pour tout $x \in I$, la fonction $t \longmapsto f(x, t)$ est intégrable sur J ;
(ii) pour tout $t \in J$, la fonction $x \longmapsto f(x, t)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I ;
(iii) pour tout $x \in I$, $t \longmapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x, t)$ est continue sur J ;
(iv) il existe une fonction φ positive et intégrable sur J, telle que pour tout $(x, t) \in I \times J$

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) \right| \leq \varphi(t)$$

(hypothèse de domination).

Alors la fonction $g : x \longmapsto \int_J f(x,t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et, pour tout $x \in I$,

$$g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)dt.$$

XII- Probabilités (compléments)

a) Séries génératrices

Série génératrices d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$:

$$G_X(t) = E(t^X) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n)t^n.$$

Le rayon de convergence est au moins égal à 1.
La variable aléatoire X admet une espérance $E(X)$ si, et seulement si G_X est dérivable en 1 et, si tel est le cas $E(X) = G'_X(t)$.
La variable aléatoire X admet une variance si et seulement si G_X est deux fois dérivable en 1. Si tel est le cas, expression de $V(X)$ en fonction de $G'_X(1)$ et $G''_X(1)$.

Série génératrice d'une somme de deux variables aléatoires indépendantes.

Questions de cours :

1. *Énoncer le théorème d'intégration terme à terme.*
   Soit S une fonction continue sur I et (f_n) est une suite de fonctions intégrables sur I telles que $S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ pour tout $t \in I$.
   Si la série $\sum_{n=0}^{+\infty} \int_I |f_n(t)|\mathrm{d}t$ est convergente alors $\int_I \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\mathrm{d}t$
2. *Retrouver la série génératrice d'une loi usuelle (loi géométrique, loi de Poisson, loi binomiale)*
   Loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$:
   $$G_X(t) = \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}t^k = \mathrm{e}^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(\lambda t)^k}{k!} = \mathrm{e}^{-\lambda+\lambda t}$$
   Loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$:
   $$G_X(t) = \sum_{k=1}^{+\infty}(1-p)^{k-1}pt^k = pt\sum_{k=1}^{+\infty}((1-p)t)^{k-1} = \frac{pt}{1-(1-p)t}$$
   Loi binomiale de paramètre (n,p) :
   $$G_X(t) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}t^k = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(pt)^k(1-p)^{n-k} = (1-p+pt)^n$$

3. *Utilisation d'une série génératrice pour déterminer une espérance ou une variance (cas où le rayon de convergence R est strictement supérieur à 1.*

   Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ de série génératrice G_X. On suppose que le rayon de convergence R est strictement supérieur à 1. Donc G_X est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-R,R[$ et on a, pour tout $t \in]-1,1[$:

$$G'_X(t) = \sum_{n=1}^{+\infty} nP(X=n)t^{n-1}$$
$$G''_X(t) = \sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)P(X=n)t^{n-2}$$

   Donc pour tout $t = 1 \in]-R,R[$, d'après le théorème de transfert :

$$E(X) = G'_X(1), \quad E(X(X-1)) = G''_X(1)$$

   Donc $V(X) = E(X(X-1)) + E(X) - E(X^2) = G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2$.