Maths DS7

Questions de cours

1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et S l'ensemble des points (x, y, z) de $\mathbb{R}^3$ tels que $f(x, y, z) = 0$.
   (a) Donner la définition d'un point régulier de S.
   (b) Donner une équation cartésienne du plan tangent à S en un point régulier (x_0, y_0, z_0) de S.
2. Soit Γ la courbe de $\mathbb{R}^3$ admettant pour représentation paramétrique :
$$\begin{cases} x &= a(t) \\ y &= b(t) \\ z &= c(t) \end{cases} \qquad (t \in \mathbb{R})$$
   où a, b, c sont trois fonctions de $\mathbb{R}$ de $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$.
   (a) Donner la définition d'un point régulier de Γ.
   (b) Soit M_0 un point régulier de Γ de paramètre $t_0 \in \mathbb{R}$.
   Donner un représentation paramétrique de la tangente à Γ en M_0.
3. Soit u un isométrie de $\mathbb{R}^3$ et A sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Montrer que A est inversible. Quel est son inverse ?

Exercice

On considère $\mathcal{S}$ la surface de $\mathbb{R}^3$ d'équation $z \times (x^2 + y^2) = 1$.

On note A le point de coordonnées $(1, 1, \frac{1}{2})$, $\mathcal{P}_A$ le plan tangent à $\mathcal{S}$ en A et Γ l'intersection de la surface $\mathcal{S}$ et du plan $\mathcal{P}$ d'équation $x = 1$.

1. Montrer que $\mathcal{S}$ est une surface de révolution d'axe (Oz). Préciser la méridienne (équation et représentation graphique).
2. (a) Vérifier que le point A appartient à $\mathcal{S}$ et donner une équation du plan tangent à $\mathcal{S}$ en A.
   (b) Vérifier que le point A appartient à Γ et donner un vecteur directeur de la tangente en A à Γ.
3. Montrer que toute droite coupe la surface $\mathcal{S}$ en au plus 3 points.

Problème

Partie 1 Étude de deux surfaces

Dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ rapporté au repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$, on considère la surface S d'équation cartésienne :

$$z = x^2 - y^2$$

ainsi que la surface Σ de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x &= u + v \\ y &= u - v \;, \quad (u,v) \in \mathbb{R}^2 \\ z &= 4uv \end{cases}$$

1. (a) Quelle est la nature de l'intersection de S avec le plan d'équation $y = \alpha$ où $\alpha \in \mathbb{R}$?
   (b) Soit α un réel. On note O_α le point de coordonnées $(0, 0, \alpha)$ et C_α l'intersection de S avec le plan d'équation $z = \alpha$.
   Quelle est la nature de C_α ? Distinguer différents cas suivant les valeurs de α.
   Tracer C_α dans le repère $(O_\alpha, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ pour $\alpha \in \{-2, 0, 1\}$. On pourra confondre les points O_α et tracer les trois courbes sur le même repère.
   (c) Soit A le point de coordonnées $(1, 1, 0)$.
   Vérifier que A appartient à S et donner une équation cartésienne de P_A, le plan tangent en A à S. Préciser la position relative de S et du plan tangent P_A.
2. (a) Vérifier que $\Sigma \subset S$. Est-ce que $\Sigma = S$?
   (b) Est-ce que tous les points de Σ sont réguliers ?
   (c) Montrer que la surface Σ est réglée.
   (d) Montrer qu'il existe deux droites passant par $A = (1, 1, 0)$ incluses dans Σ. Donner une équation du plan engendré par ces deux droites.

Partie 2 Étude d'une famille de courbes paramétrées

Soit a un réel non nul et Γ_a la courbe paramétrée par :

$$\begin{cases} x &= (a+1)t \\ y &= (a-1)t \;, \quad t \in \mathbb{R}. \\ z &= 4at^2 \end{cases}$$

Pour tout réel t, on note $A_a(t)$ le point de paramètre t de Γ_a.

3. Montrer que Γ_a est une courbe tracée sur Σ.
4. Soit $t \in \mathbb{R}$. Donner un vecteur directeur de la normale à Σ en $A_a(t)$.
5. Justifier que, pour tout réel t, les vecteurs $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OA_a}}{\mathrm{d}t}(t)$ et $\dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OA_a}}{\mathrm{d}t^2}(t)$ engendrent un plan.
6. Soit $t \in \mathbb{R}$. Donner une équation cartésienne du plan passant par $A_a(t)$ et engendré par les vecteurs $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OA_a}}{\mathrm{d}t}(t)$ et $\dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OA_a}}{\mathrm{d}t^2}(t)$.
   Vérifier que ce plan ne dépend pas de t. On le note P_a.

7. Pour quelles valeurs de a, en tout point $A_a(t)$ de Γ_a, la normale à Σ en $A_a(t)$ est incluse dans P_a ?

Partie 3 Nature des coubes Γ_a

On considère les vecteurs :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u} &= \overrightarrow{k} \\
\overrightarrow{v} &= \frac{1}{\sqrt{2(a^2+1)}}\left((a+1)\overrightarrow{i} + (a-1)\overrightarrow{j}\right). \\
\overrightarrow{w} &= \frac{1}{\sqrt{2(a^2+1)}}\left(-(a-1)\overrightarrow{i} + (a+1)\overrightarrow{j}\right)
\end{aligned}$$

8. (a) Vérifier que $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une base orthonormée directe de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Écrire la matrice Q_1 de passage de la base $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ vers $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$.
   (c) Écrire la matrice Q_2 de passage de la base $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ vers $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$.
   (d) Déterminer la nature de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice Q_1.
   (e) Déterminer la nature de l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice Q_2.
9. Les coordonnées d'un point M dans le repère $(O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ sont (x, y, z) et ses coordonnées dans $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ sont (x', y', z').
   Exprimer (x', y', z') en fonction de (x, y, z).
10. Donner une représentation paramétrique de Γ_a dans le repère $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$. En déduire la nature de Γ_a et préciser ses éléments caractéristiques.