Maths DS7 - Corrigé

Exercice

1. L'intersection entre la surface et le plan d'équation $z = a$ est le cercle de centre $(0, 0, a)$ de rayon $1\sqrt{a}$ si $a > 0$. Cette intersection est vide si $a \leqslant 0$.
   Donc $\mathcal{S}$ est une surface de révolution d'axe (Oz).
   La méridienne est l'intersection de cette surface avec le plan d'équation $x = 0$. Cette courbe a pour équation $z = 1/y^2$ dans le repère $(O, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$. Elle est bien sûr symétrique par rapport à l'axe de révolution (Oz).
2. (a) Le plan $\mathcal{P}_A$ a pour équation $x + y + 2z = 3$
   (b) Erreur d'énoncé (avec le sujet distribué le jour du DS) !
3. Soit $\mathcal{D}$ la droite paramétrée par :
$$\begin{cases} x &= x_0 + at \\ y &= y_0 + bt \\ z &= z_0 + ct \end{cases}$$
   Un point de paramètre t de cette droite appartient à $\mathcal{S}$ si et seulement si :
$$(z_0 + ct)((x_0 + at)^2 + (y_0 + bt)^2) - 1 = 0 \qquad (\star)$$
   C'est une équation polynomiale de degré au plus 3. Si le membre de gauche n'est pas le polynôme nul, la droite coupe la surface en au plus trois fois.
   Il reste à montrer que les coeffficients de t ne sont pas tous nuls, ce qui n'est pas tout à fait évident ! J'attendais surtout la mise en équation et un argument sur le nombre de solutions de l'équation obtenue.

Problème

1. (a) Les coordonnées des points d'intersection vérifient :
$$\begin{cases} y &= \alpha \\ z &= x^2 - \alpha^2 \end{cases}$$
   L'intersection est une parabole.
   (b) Les coordonnées des points d'intersection vérifient :
$$\begin{cases} z &= \alpha \\ \alpha &= x^2 - y^2 \end{cases}$$
   L'intersection est une hyperbole si $\alpha \neq 0$, l'intersection est la réunion de deux droites lorsque $\alpha = 0$.
   (c) On a $0 = 1^2 - 1^2$ donc A appartient à S. Soit f la fonction $(x, y) \longmapsto x^2 - y^2$. Cette fonction est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et $\nabla f(1, 1) = (2, -2)$. Donc P_A admet pour équation :
$$z = 2(x - 1) - 2(y - 1) \Longleftrightarrow z = 2x - 2y.$$
   Pour étudier la position relative de S et de P_A on étudie le signe de :
$$x^2 - y^2 - (2x - 2y) = (x - 1)^2 - (y - 1)^2.$$
   Cette différence est strictement positive si $y = 1$ et $x \neq 1$, elle est strictement négative si $x = 1$ et $y \neq 1$. Donc P_A traverse la surface S.

2. (a) Soit $M = (u+v, u-v, 4uv)$ un point de Σ. On a :

$$(u+v)^2 - (u-v)^2 = u^2 + 2uv + v^2 - u^2 + 2uv - v^2 = 4uv$$

Donc M appartient à S, d'où l'inclusion $\Sigma \subset S$.
Soit $M = (x, y, z)$ un point de S. On pose $u = \dfrac{x+y}{2}$, $v = \dfrac{x-y}{2}$. Ainsi $u + v = x$, $u - v = y$ et $4uv = x^2 - y^2 = z$. Donc $\Sigma = S$.

(b) On pose $f(u, v) = (u+v, u-v, 4uv)$. La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

$$\partial_1 f(u, v) = (1, 1, 4v)$$
$$\partial_2 f(u, v) = (1, -1, 4u)$$

Pour tout (u, v) de $\mathbb{R}^2$, les vecteurs $\partial_1 f(u, v)$ et $\partial_2 f(u, v)$ ne sont pas colinéaires. Donc les points de Σ sont réguliers.

(c) On remarque que $f(u, v) = (u, u, 0) + (1, -1, 4u)v$ pour tout (u, v) de $\mathbb{R}^2$. Donc Σ est une surface réglée.

(d) La droite passant par A et dirigée par $\overrightarrow{u_1} = (1, -1, 4)$ est incluse dans Σ.
On a aussi $f(u, v) = (v, -v, 0) + (1, 1, 4v)u$ pour tout (u, v) de $\mathbb{R}^2$. Donc la droite passant par A et dirigée par $\overrightarrow{u_2} = (1, 1, 4)$ est également incluse dans Σ.
Le plan engendré par ces deux droites admet pour vecteur normal :

$$\overrightarrow{n} = \overrightarrow{u_1} \wedge \overrightarrow{u_2} = 2(4, 0, -1)$$

Donc ce plan admet pour équation $4x - z = 4$.

3. On remarque que $A_a(u)$ est le point de paramètres $u = at$ et $v = t$. Donc Γ_a est tracée sur Σ.

4. La surface Σ admet pour équation $x^2 - y^2 - z = 0$. Donc le vecteur $(2x, -2y, -1)$ est un vecteur normal à Σ au point (x, y, z).
Donc $(2(a+1)t, -2(a-1)t, -1)$ est un vecteur directeur de la normale à Σ en $A_a(u)$.

5. $\dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OA_a}}{\mathrm{d}t}(t) = (a+1, a-1, 8at)$ et $\dfrac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OA_a}}{\mathrm{d}t^2}(t) = (0, 0, 8a)$. Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc ils engendrent un plan.

6. Le plan $P_a(t)$ admet pour vecteur normal $(a-1, -(a+1), 0)$ car :

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OA_a}}{\mathrm{d}t}(t) \wedge \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{OA_a}}{\mathrm{d}t^2}(t) = 8a(a-1, -(a+1), 0)$$

Donc $P_a(t)$ admet pour équation cartésienne :

$$(a-1)x - (a+1)y = 0$$

7. La normale à Σ en $A_a(t)$ est dirigée par $(2(a+1)t, -2(a-1)t, -1)$ et le plan $P_a(t)$ admet pour normal $(a-1, -(a+1), 0)$. On veut donc que ces vecteurs soient orthogonaux pour tout t réel :

$$2(a+1)t \times (a-1) + 2(a-1)t \times (a+1) = 0 \Longleftrightarrow t \times (a-1)(a+1) = 0.$$

Dans ce cas $a = 1$ ou $a = -1$.

8. (a) Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux et de norme 1. De plus $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{w}$, donc la famille $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ est une base orthonormée directe.

   (b) $Q_1 = \begin{pmatrix} 0 & \frac{a+1}{\sqrt{2(a^2+1)}} & -\frac{a-1}{\sqrt{2(a^2+1)}} \\ 0 & \frac{a-1}{\sqrt{2(a^2+1)}} & \frac{a+1}{\sqrt{2(a^2+1)}} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

   (c) $Q_2 = Q_1^{-1} = Q_1^T$ car les bases $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ et $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ sont orthonormées.

   Donc $Q_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{a+1}{\sqrt{2(a^2+1)}} & \frac{a-1}{\sqrt{2(a^2+1)}} & 0 \\ -\frac{a-1}{\sqrt{2(a^2+1)}} & \frac{a+1}{\sqrt{2(a^2+1)}} & 0 \end{pmatrix}$

   (d) L'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice Q_1 est une rotation car les bases $(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ et $(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ sont orthonormées et directes.

   (e) L'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à la matrice Q_2 est également une rotation (pour la même raison).

9. On a :

$$\begin{cases} x' &= z \\ y' &= \dfrac{(a+1)x + (a-1)y}{\sqrt{2(a^2+1)}} \\ z' &= \dfrac{-(a-1)x + (a+1)y}{\sqrt{2(a^2+1)}} \end{cases}$$

10. On a :

$$\begin{cases} x' &= 4at^2 \\ y' &= \sqrt{2(a^2+1)}t \\ z' &= 0 \end{cases}$$

C'est une courbe du plan d'équation $z' = 0$. Dans ce plan, elle admet pour équation $x' = \dfrac{2a}{a^2+1}y'^2$. Il s'agit d'une parabole de sommet O et d'axe $(O, \overrightarrow{u})$.

Barème : 36 points (30 points pour avoir 20)

Question de cours : 5=2+2+1

Exercice : 7 = 3+2+0+2

Problème :

Partie 1 : 12.5=0.5+2.5+2.5+2+1+1+3
Partie 2 : 4.5 = 0.5+1+1+1+1
Partie 3 : 7 = 1+1+1+0.5+0.5+1+2