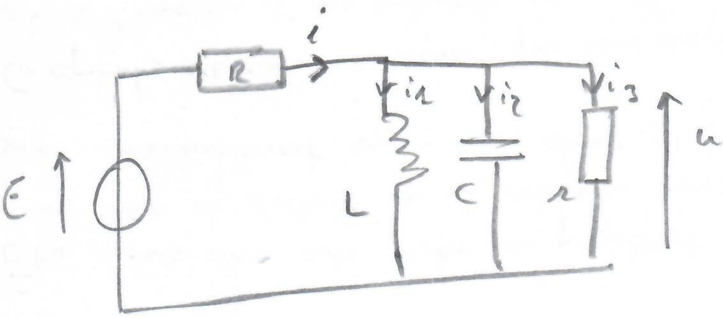
Électrocinétique 1



1. * Par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur :

$$u(0^+) = u(0^-) = 0$$

Donc $i_3(0^+) = \dfrac{u(0^+)}{r} = 0$

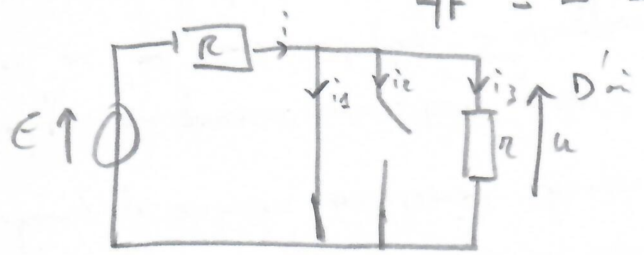
Par continuité de l'intensité du courant dans une bobine :

$$i_1(0^+) = i_1(0^-) = 0$$

Ainsi $i(0^+) = i_2(0^+) = \dfrac{E}{R}$ (loi des mailles)

* Pour $t \to +\infty$: en régime établi continu (figure ci-contre),

$$\dashv\vdash \simeq \text{—/—} \quad \text{et} \quad \text{—mm—} \simeq \text{———}$$



$u(+\infty) = 0$

$i_3(+\infty) = 0 = i_2(+\infty)$

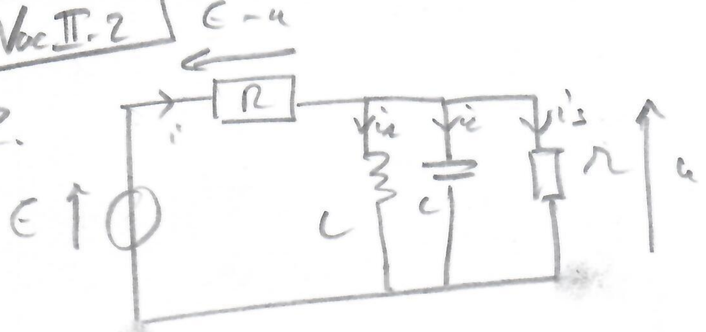
$i(+\infty) = i_1(+\infty) = \dfrac{E}{R}$.

Finalement :

	u	i	i_1	i_2	i_3
$t = 0^+$	0	E/R	0	E/R	0
$t \to +\infty$	0	E/R	E/R	0	0

C.Voc II.2

2.



$$\begin{cases} L: & u = L\dfrac{di_1}{dt} \\ C: & i_2 = C\dfrac{du}{dt} \\ r: & u = r i_3 \end{cases}$$

Loi des noeuds : $i = i_1 + i_2 + i_3$

$$\frac{E-u}{R} = i_1 + C\frac{du}{dt} + i_3$$

$\frac{d}{dt}$

$$-\frac{1}{R}\frac{du}{dt} = \frac{di_1}{dt} + C\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{di_3}{dt}$$

$$-\frac{1}{R}\frac{du}{dt} = \frac{u}{L} + C\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{di_3}{dt}$$

$$0 = \frac{r}{L}i_3 + rC\frac{d^2i_3}{dt^2} + \frac{di_3}{dt} + \frac{r}{R}\frac{di_3}{dt}$$

$$rC\frac{d^2}{dt^2}(i_3) + \left(1+\frac{r}{R}\right)\frac{di_3}{dt} + \frac{r}{L}i_3 = 0$$

$$\boxed{\frac{d^2i_3}{dt^2} + \underbrace{\frac{1+\frac{r}{R}}{rC}}_{\frac{\omega_0}{Q}}\frac{di_3}{dt} + \underbrace{\frac{1}{LC}}_{\omega_0^2}i_3 = 0}$$

D'où $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$ et $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R+r}{RrC}$

$$\boxed{Q = \frac{rRC}{R+r}\omega_0}$$

(NB: $\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \Leftrightarrow C\omega_0 = \frac{1}{L\omega_0}$ d'où $Q = \frac{rR}{r+R}\frac{1}{L\omega_0}$)

3. $$\frac{d^2 i_3}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{di_3}{dt} + \omega_0^2 i_3 = 0$$

éq° carac : $r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$

$$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 = \omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right)$$

Le régime est pseudo-périodique si $\Delta < 0$

donc si $\frac{1}{Q^2} - 4 < 0$

$\frac{1}{Q^2} < 4$

$Q^2 > \frac{1}{4}$

$\boxed{Q > \frac{1}{2}} \iff \boxed{\frac{rR}{R+r}\sqrt{\frac{C}{L}} > \frac{1}{2}}$

Si cette condition est vérifiée,

$$r_\pm = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{j\sqrt{-\Delta}}{2}$$

$$r_\pm = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\left(\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}\right)\omega_0$$

On pose $\boxed{\frac{1}{\tau} = \frac{\omega_0}{2Q}}$ et $\boxed{\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$

$$r_\pm = -\frac{1}{\tau} \pm j\Omega$$

On a alors $\boxed{i_3(t) = e^{-t/\tau}\left(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right)}$

Conditions initiales : $i_3(0^+) = A = 0$

d'où $i_3(t) = B e^{-t/\tau}\sin(\Omega t)$

De plus, $i_2 = C\frac{du}{dt} = rC\frac{di_3}{dt} = rCB\left[-\frac{1}{\tau}\sin(\Omega t) + \Omega\cos(\Omega t)\right]e^{-t/\tau}$

$i_2(0^+) = rC\Omega B = \frac{E}{R}$

Chac II - 2 (4)

d'où $\boxed{B = \dfrac{E}{rRC\Omega}}$

Ainsi $\boxed{i_3(t) = \dfrac{E}{rRC\Omega} e^{-t/\tau} \sin(\Omega t)}$