Semaine 1 (15/09–19/09) : algèbre linéaire hors réduction

Consignes La colle débute par la restitution écrite d'un énoncé mathématique choisi par l'examinateur dans la liste fournie ci-après, et par un calcul d'inverse d'une matrice 3×3. Tout ceci n'excèdera pas 10 minutes.

La colle se poursuivra par la résolution d'un ou plusieurs exercices fournis par l'examinateur dans le cadre des exigibles et du programme détaillé dans la suite.

Notation La connaissance du cours et le calcul déterminent la fourchette dans laquelle sera évalué l'étudiant :

— énoncé su et calcul correct : note minimale de 12/20 ;

— énoncé non su et calcul faux : note maximale de 5/20 ;

— autre situation : note comprise entre 6 et 13.

Les colleurs sont libres d'utiliser toutes les notes allant de 0 à 20 dans le respect des contraintes ci-dessus.

Énoncés

Définition d'un hyperplan. Un hyperplan d'un $\mathbb{K}$-ev E est un sous-espace vectoriel de E admettant une droite vectorielle comme supplémentaire.

Caractérisation des hyperplans en dim finie. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dim finie $n \in \mathbb{N}^*$ et soit H un sev de E.
Alors H est un hyperplan de E ssi $\dim H = n - 1$.

Équation cartésienne d'un hyperplan de $\mathbb{R}^n$. Soit H un hyperplan de $\mathbb{R}^n$.
Alors il existe $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ non nul tel que $a_1 x_1 + \cdots + a_n x_n = 0$ soit une équation cartésienne de H.

Intersection d'hyperplans. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dim n.
Alors l'intersection de p hyperplans de E forme un sev de dimension au moins $n - p$.

Définition d'un sous-espace stable. Un sev F d'un $\mathbb{K}$-ev E est stable par $u \in \mathscr{L}(E)$ si, pour tout $\vec{x} \in F$, $u(\vec{x})$ appartient à F.

Caractérisation matricielle d'un sous-espace stable. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et soit F un sev de E de dimension p. Si $\mathscr{B}$ est une base de E dont les p premiers vecteurs forment une base de F, et si l'on décompose la matrice $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ en quatre blocs sous la forme $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$, alors F est stable par u ssi $C = 0_{n-p,p}$.

Définition des matrices semblables. A et B sont semblables s'il existe P inversible vérifiant $A = PBP^{-1}$.

Caractérisation des matrices semblables. A et B sont semblables ssi elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes.

Définition et propriétés de la trace. La trace est l'application définie sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ par $\mathrm{tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} [A]_{k,k}$. C'est une application linéaire et elle vérifie $\mathrm{tr}(A^\top) = \mathrm{tr}(A)$ et $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

Liste des exigibles et programme détaillé

— connaître les espaces vectoriels de référence ;
— savoir démontrer qu'une partie d'un ev de référence est un sous-espace vectoriel ;
— savoir démontrer qu'une famille finie de vecteurs est libre ;
— pouvoir déterminer l'espace engendré par une famille de vecteurs sur des exemples simples ;
— pouvoir définir la notion de dimension et l'interpréter en terme de nombre de degrés de liberté ;
— pouvoir s'appuyer sur l'intuition géométrique pour illustrer la notion de somme et de supplémentaire ;
— maîtriser le vocabulaire lié aux applications linéaires ;
— savoir démontrer qu'une application est linéaire ;
— savoir expliciter le noyau et l'image d'une application linéaire sur des exemples simples ;
— connaître le théorème du rang et pouvoir l'exploiter dans des problèmes linéaires ;
— être capable d'exploiter le calcul matriciel pour décortiquer une application linéaire ;
— savoir caractériser un projecteur et une symétrie ;
— pouvoir choisir une base adaptée pour traiter un problème linéaire ;
— savoir calculer la trace d'un endomorphisme.

I) Notions de 1re année en algèbre linéaire

II) Compléments

1) Sommes finies de sous-espaces
- Définition de $F_1 + \cdots + F_r$.
- Définition et caractérisation de sev en somme directe.

2) Hyperplans
- Définition d'un hyperplan.
- Caractérisation par la dimension.
- Équation cartésienne d'un hyperplan de $\mathbb{R}^n$.
- Intersections de p hyperplans.

3) Matrices semblables et trace
- Définition des matrices semblables.
- Caractérisation des matrices semblables.
- Définition de la trace d'une matrice carrée.
- Propriétés de la trace.
- Définition de la trace d'un endomorphisme.
- Trace d'un projecteur.

4) Sous-espaces stables
- Définition d'un sev stable par un endomorphisme.
- Endomorphisme induit.
- Interprétation matricielle par blocs d'un sev stable