Semaine 1 (23/09–27/09) : algèbre linéaire hors réduction

Consignes La colle débute par la restitution écrite d'énoncés mathématiques choisis par l'examinateur dans la liste fournie ci-après. Cette restitution n'excèdera pas 8 minutes sinon les énoncés manquants seront considérés comme non sus. Pour cette semaine :

— 1 énoncé pioché dans « Espaces vectoriels »

— 1 définition parmi « homothétie, projecteur, symétrie » (dessin inclus) ;

— 1 autre énoncé pioché dans « Applications linéaires »

— 1 énoncé pioché dans « Matrices »

La colle se poursuivra par la résolution d'un ou plusieurs exercices fournis par l'examinateur dans le cadre des exigibles et du programme détaillé dans la suite.

Notation La connaissance du cours détermine la fourchette dans laquelle sera évalué l'étudiant :

— 4 énoncés sus : note minimale de 9/20 ;

— 1 énoncé erroné ou non su : note maximale de 13/20 ;

— 2 énoncés erronés ou non sus : note maximale de 6/20 ;

Les colleurs sont libres d'utiliser toutes les notes allant de 0 à 20 dans le respect des contraintes ci-dessus.

Énoncés

Espaces vectoriels

<u>Définition d'un hyperplan</u>. Un hyperplan d'un ev E est un sous-espace vectoriel de E admettant une droite vectorielle comme supplémentaire.

<u>Caractérisation des hyperplans en dim finie</u>. Soit E un ev de dim finie n et soit H un sev de E.
Alors H est un hyperplan de E ssi $\dim H = n-1$.

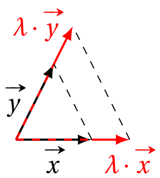
<u>Équation cartésienne d'un hyperplan de $\mathbb{R}^n$</u>. Soit H un hyperplan de $\mathbb{R}^n$.
Alors il existe $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ non nul tel que $a_1x_1+\cdots+a_nx_n=0$ soit une équation cartésienne de H.

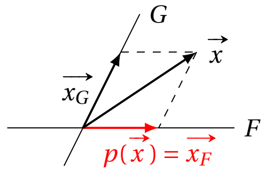
<u>Intersection d'hyperplans</u>. Soit E un ev de dim n.
Alors l'intersection de p hyperplans de E forme un sev de dimension au moins $n-p$.

Applications linéaires et endomorphismes

<u>Théorème du rang</u>. Soit E un ev de dim finie. Soit F un ev et soit $u\in\mathscr{L}(E,F)$.
Alors $\dim E = \dim(\operatorname{Ker} u)+\dim(\operatorname{Im} u)$.

<u>Homothétie</u>. $u\in\mathscr{L}(E)$ est une homothétie s'il existe $\lambda\in\mathbb{K}$ vérifiant $u=\lambda\mathrm{id}_E$:
$\forall \overrightarrow{x}\in E,\ u(\overrightarrow{x})=\lambda\overrightarrow{x}$.



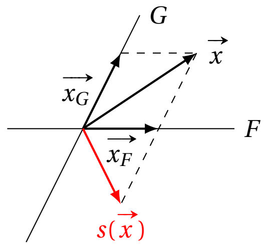


Définition d'un projecteur. Si $E = F \oplus G$, on appelle projecteur sur F parallèlement à G l'endomorphisme p définie par $p : \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x_F} + \overrightarrow{x_G} \mapsto \overrightarrow{x_F}$.

Caractérisation des projecteurs. $p \in \mathscr{L}(E)$ est un projecteur ssi $p^2 = p$.
Dans ce cas $E = \operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p$ et $\operatorname{Im} p = \operatorname{Ker}(p - \mathrm{id}_E)$.

Matrice d'un projecteur dans une base adaptée. Si $E = F \oplus G$, où $\dim(F) = r$ et $\dim(G) = n - r$, et si $\mathscr{B}$ est une base adaptée à la somme directe, alors la matrice dans la base $\mathscr{B}$ de la projection sur F parallèlement à G est

$$\left(\begin{array}{c|c} I_r & 0_{r,n-r} \\ \hline 0_{n-r,r} & 0_{n-r} \end{array}\right).$$



Définition d'une symétrie. Si $E = F \oplus G$, on appelle symétrie par rapport à F parallèlement à G l'endomorphisme s définie par $s : \overrightarrow{x} = \overrightarrow{x_F} + \overrightarrow{x_G} \mapsto \overrightarrow{x_F} - \overrightarrow{x_G}$.

Caractérisation des symétries. $s \in \mathscr{L}(E)$ est une symétrie ssi $s^2 = \mathrm{id}_E$.
Dans ce cas $E = \operatorname{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \oplus \operatorname{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$.

Matrice d'une symétrie dans une base adaptée. Si $E = F \oplus G$, où $\dim(F) = p$ et $\dim(G) = q$, et si $\mathscr{B}$ est une base adaptée à la somme directe, alors la matrice dans la base $\mathscr{B}$ de la symétrie par rapport à F parallèlement à G est

$$\left(\begin{array}{c|c} I_p & 0_{p,q} \\ \hline 0_{q,p} & -I_q \end{array}\right).$$

Définition d'un sous-espace stable. F est stable par $u \in \mathscr{L}(E)$ si $\forall \overrightarrow{x} \in F, u(\overrightarrow{x}) \in F$.

Caractérisation matricielle d'un sous-espace stable. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et soit F un sev de E de dim p. Si $\mathscr{B}$ est une base de E dont les p premiers vecteurs forment une base de F, et si l'on décompose la matrice $M = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ en quatre blocs sous la forme $M = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline C & D \end{array}\right)$, alors F est stable par u ssi $C = 0_{n-p,p}$.

Matrices

Formule du produit matriciel. Soient $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.
Alors $AB \in \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ et $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!], [AB]_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} [A]_{i,k}[B]_{k,j}$.

Formule de changement de base pour un vecteur. $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{x}) = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} \times \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}'}(\overrightarrow{x})$.

Formule de changement de base pour un endomorphisme. $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'} \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}'}(u) P_{\mathscr{B}'\to\mathscr{B}}$.

Définition des matrices semblables. A et B sont semblables s'il existe P inversible vérifiant $A = PBP^{-1}$.

Caractérisation des matrices semblables. A et B sont semblables ssi elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes.

Définition et propriétés de la trace. La trace est l'application linéaire définie sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ par $\operatorname{tr}(A) = \sum_{k=1}^{n} [A]_{k,k}$. Elle vérifie $\operatorname{tr}(A^{\top}) = \operatorname{tr}(A)$ et $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

Liste des exigibles et programme détaillé

- connaître les espaces vectoriels de référence ;
- savoir démontrer qu'une partie d'un ev de référence est un sous-espace vectoriel ;
- savoir démontrer qu'une famille finie de vecteurs est libre ;
- pouvoir déterminer l'espace engendré par une famille de vecteurs sur des exemples simples ;
- pouvoir définir la notion de dimension et l'interpréter en terme de nombre de degrés de liberté ;
- pouvoir s'appuyer sur l'intuition géométrique pour illustrer la notion de somme et de supplémentaire ;
- maîtriser le vocabulaire lié aux applications linéaires ;
- savoir démontrer qu'une application est linéaire ;
- savoir expliciter le noyau et l'image d'une application linéaire sur des exemples simples ;
- connaître le théorème du rang et pouvoir l'exploiter dans des problèmes linéaires ;
- être capable d'exploiter le calcul matriciel pour décortiquer une application linéaire ;
- savoir caractériser un projecteur et une symétrie ;
- pouvoir choisir une base adaptée pour traiter un problème linéaire ;
- savoir calculer la trace d'un endomorphisme.

I) Notions de 1re année sur les espaces vectoriels

II) Notions de 1re année sur les applications linéaires

III) Notions de 1re année sur les matrices et la représentation matricielle

IV) Compléments

1) Sommes finies de sous-espaces
   - Définition de $F_1 + \cdots + F_r$.
   - Définition et caractérisation de sev en somme directe.
2) Hyperplans
   - Définition d'un hyperplan.
   - Caractérisation par la dimension.
   - Équation cartésienne d'un hyperplan de $\mathbb{R}^n$.
   - Intersections de p hyperplans.
3) Endomorphismes remarquables
   - Définition d'une homothétie.
   - Définition et caractérisation d'un projecteur.
   - Matrice d'un projecteur dans une base adaptée.
   - Définition et caractérisation d'une symétrie.
   - Matrice d'une symétrie dans une base adaptée.
4) Matrices semblables et trace
   - Définition des matrices semblables.
   - Caractérisation des matrices semblables.
   - Définition de la trace d'une matrice carrée.
   - Propriétés de la trace.
   - Définition de la trace d'un endomorphisme.
   - Trace d'un projecteur.
5) Sous-espaces stables
   - Définition d'un sev stable par un endomorphisme.
   - Endomorphisme induit.
   - Interprétation matricielle par blocs d'un sev stable