Semaine 3 (29/09–03/10) : analyse de 1^re^ année ; intégration

Consignes La colle débute par la restitution écrite d'un énoncé mathématique choisi par l'examinateur dans la liste fournie ci-après, et par un calcul au choix de la liste suivante :

— recherche d'une primitive de $t \mapsto \cos^k(\alpha t)\sin^\ell(\beta t)$, où $(k,\ell) \in \mathbb{N}^2$ et $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$;

— recherche d'une primitive de $t \mapsto \mathrm{e}^{\alpha t}\cos(\beta t)$ ou de $t \mapsto \mathrm{e}^{\alpha t}\sin(\beta t)$, où $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$;

— calcul d'une intégrale sur un segment à l'aide d'un changement de variable donné.

Tout ceci n'excèdera pas 10 minutes.

La colle se poursuivra par la résolution d'un ou plusieurs exercices fournis par l'examinateur dans le cadre des exigibles et du programme détaillé dans la suite.

⚠Une séance d'exercices a déjà eu lieu sur la mise en place des critères de comparaison pour les intégrales de fonctions positives mais une seconde séance de td est prévue le mercredi 01/10 pour le reste. ⚠

Notation La connaissance du cours et le calcul déterminent la fourchette dans laquelle sera évalué l'étudiant :

— énoncé su et calcul correct : note minimale de 11/20 ;

— énoncé non su et calcul faux : note maximale de 7/20 ;

— autre situation : note comprise entre 8 et 14.

Les colleurs sont libres d'utiliser toutes les notes allant de 0 à 20 dans le respect des contraintes ci-dessus.

Énoncés

Définition de la cv d'une intégrale sur $[a,b[$. Soit $f \in \mathscr{C}([a,b[,\mathbb{R})$. L'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est dite convergente si $x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ possède une limite finie en b.

CVA d'une intégrale, intégrabilité. L'intégrale $\int_I f$ est dite absolument convergente ou f est dite intégrable sur I si l'intégrale $\int_I |f|$ converge. Dans ce cas, l'intégrale $\int_I f$ est également convergente.

Intégrales de référence. $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ cv ssi $\alpha > 1$; $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ cv ssi $\alpha < 1$; $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t$ cv ssi $\lambda > 0$; $\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$ cv.

Caractérisation de la cv des intégrales de fonctions positives. Soit f continue sur $[a,b[$ et positive. Alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ cv ssi $x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est majorée sur $[a,b[$.

Critère de majoration/minoration des intégrales de fonctions positives. Soient f et g continues sur $[a,b[$ vérifiant $0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$, pour tout $t \in [a,b[$.
Alors : si l'intégrale $\int_a^b g$ cv, alors l'intégrale $\int_a^b f$ cv ; si l'intégrale $\int_a^b f$ dv, alors l'intégrale $\int_a^b g$ dv.

Critère d'équivalence des intégrales de fonctions positives. Soient f et g continues sur $[a,b[$, positives et vérifiant $f(t) \underset{b}{\sim} g(t)$.

Alors : $\int_a^b f$ cv ssi $\int_a^b g$ cv.

Critère de négligeabilité/domination pour les fonctions intégrables. Soient $f, g : [a,b[\to \mathbb{K}$ continues sur $[a,b[$ et vérifiant $f(t) = o_b[g(t)]$ ou $f(t) = O_b[g(t)]$. Alors, si g est intégrable sur $[a,b[$, f l'est également.

Intégration par parties. Soient u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b[$. Si le crochet $\Big[uv\Big]_a^b$ converge, les intégrales $\int_a^b u'v$ et $\int_a^b uv'$ sont de même nature. En cas de convergence :

$$\int_a^b u'v = \Big[uv\Big]_a^b - \int_a^b uv', \quad \text{où} \quad \Big[uv\Big]_a^b = \left(\lim_b uv\right) - \left(\lim_a uv\right).$$

Changement de variable $t = \varphi(u)$. Soient $\varphi : J \to I$ de classe $\mathscr{C}^1$ et bijective, et soit $f : I \to \mathbb{K}$ continue. Alors les intégrales $\int_J f[\varphi(u)]\varphi'(u)\mathrm{d}u$ et $\int_I f(t)dt$ sont de même nature. En cas de convergence :

$$\int_I f(t)\mathrm{d}t = \begin{cases} \int_J f[\varphi(u)]\varphi'(u)\mathrm{d}u & \text{si } \varphi \text{ est strictement croissante,} \\ -\int_J f[\varphi(u)]\varphi'(u)\mathrm{d}u & \text{si } \varphi \text{ est strictement décroissante.} \end{cases}$$

Programme détaillé

Liste des exigibles

— pourvoir exploiter les théorèmes et techniques vues en première année pour aborder un exercice d'analyse ;

— mettre en évidence une intégrale généralisée ;

— connaître les intégrales de référence ;

— pouvoir établir la convergence de intégrale d'une fonction de signe constant au voisinage de 0 ou de $+\infty$ via les théorèmes de comparaison ;

— pouvoir utiliser un changement de variable affine pour se ramener à une intégrale généralisée en 0 ou en $+\infty$.

I) Rappels essentiels de 1re année

II) Intégration d'une fonction continue sur un intervalle quelconque

1) Intégrales généralisées
- Définition de la convergence d'une intégrale sur un intervalle quelconque.
- Définition de la convergence absolue d'une intégrale sur un intervalle quelconque.

2) Nature de l'intégrale d'une fonction de signe constant
- Intégrales de référence
- Critère de convergence de l'intégrale d'une fonction positive.
- Critères de comparaison

3) Manipulation des intégrales convergentes
- Linéarité.
- Changement de variable.
- Intégration par parties.

4) Fonctions intégrables
- Définition de l'intégrabilité d'une fonction sur un intervalle.
- Inégalité triangulaire.
- Critère de négligeabilité/domination.