Semaine 3 (07/10–11/10) : intégration

Consignes La colle débute par la restitution écrite d'énoncés mathématiques choisis par l'examinateur dans la liste fournie ci-après. Cette restitution n'excèdera pas 10 minutes sinon les énoncés manquants seront considérés comme non sus. Pour cette semaine :

— 1 DL

— 1 énoncé pioché dans « Continuité », « Dérivabilité » ou « intégration sur un segment ».

— 1 fonction trigonométrique réciproque

— Intégrales de référence.

— 1 énoncé pioché dans « intégration sur un intervalle quelconque » hors intégrales de référence.

La colle se poursuivra par la résolution d'un ou plusieurs exercices fournis par l'examinateur dans le cadre des exigibles et du programme détaillé dans la suite.

Notation La connaissance du cours détermine la fourchette dans laquelle sera évalué l'étudiant :

— 5 énoncés sus : note minimale de 9/20 ;

— 1 énoncé erroné ou non su : note maximale de 13/20 ;

— 2 énoncés erronés ou non sus : note maximale de 9/20 ;

— au moins 3 énoncés erronés ou non sus : note maximale de 5/20.

Les colleurs sont libres d'utiliser toutes les notes allant de 0 à 20 dans le respect des contraintes ci-dessus.

Énoncés

DL usuels au voisinage de 0

$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + O_0(x^{n+1})$	$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \cdots + (-1)^n x^n + O_0(x^{n+1})$
$\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + O_0(x^{n+1})$	$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}x^n}{n} + O_0(x^{n+1})$
$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + O_0(x^{n+1})$	$\mathrm{e}^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{(-1)^n x^n}{n!} + O_0(x^{n+1})$
$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + O_0(x^{n+1})$	
$\sin(x) = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O_0(x^{2n+3})$	$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O_0(x^{2n+2})$
$\mathrm{sh}(x) = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + O_0(x^{2n+3})$	$\mathrm{ch}(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \cdots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + O_0(x^{2n+2})$
$\mathrm{Arctan}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + O_0(x^{2n+3})$	$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + O_0(x^7)$

Théorèmes sous hypothèse de continuité

Théorème des valeurs intermédiaires. Toute fonction continue sur un intervalle I à valeurs réelles et prenant deux valeurs de signes opposés s'annule au moins une fois sur I.

Bornes atteintes. Soit f une fonction continue sur le segment $[a, b]$ et à valeurs réelles.
Alors f est bornée et atteint ses bornes : elle possède un minimum et un maximum.

Bijection continue. Soit f continue et strictement monotone sur un intervalle I.
Alors f réalise une bijection de I sur $J = f(I)$ et $f^{-1} : J \to I$ est continue et strictement monotone de même monotonie que f.

Théorèmes sous hypothèse de dérivabilité

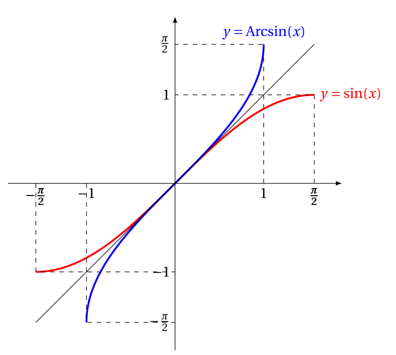
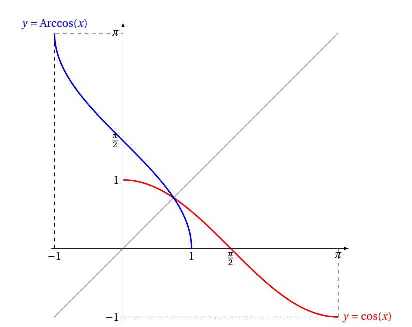
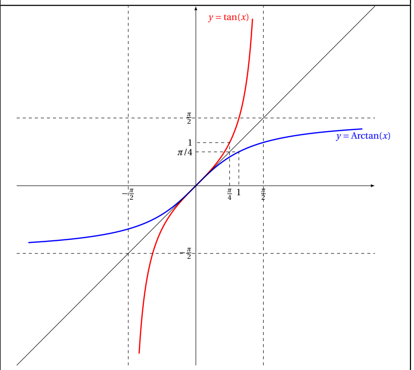
Dérivée de la réciproque. Soit une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ strictement monotone et dérivable en $x \in I$.
Alors f^{-1} est dérivable en $y = f(x)$ ssi $f'(x) \neq 0$, et dans ce cas $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'[f^{-1}(y)]}$.

Égalité des accroissements finis. Soit f continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.
Alors il existe $c \in]a,b[$ vérifiant $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Inégalité des accroissements finis. Soit f continue et dérivable sur I et vérifiant : $\exists K \geqslant 0, \forall x \in I, |f'(x)| \leqslant K$.
Alors : $\forall (x,y) \in I^2, \quad |f(x) - f(y)| \leqslant K|x-y|$.

Limite de la dérivée. Soit f continue sur $[a,b]$, dérivable sur $[a,b[$ et vérifiant $f'(x) \xrightarrow[x \to b]{} \ell \in \mathbb{R}$.
Alors f est dérivable en b et $f'(b) = \ell$.

Fonctions trigonométriques réciproques

Arcsin	Arccos	Arctan
		
réalise une bijection continue de $[-1,1]$ sur $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	réalise une bijection continue de $[-1,1]$ sur $[0,\pi]$	réalise une bijection continue de $\mathbb{R}$ sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$
$\text{Arcsin} x = \theta$ ssi $\begin{cases} \sin\theta = x \\ \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$	$\text{Arccos} x = \theta$ ssi $\begin{cases} \cos\theta = x \\ \theta \in [0,\pi] \end{cases}$	$\text{Arctan} x = \theta$ ssi $\begin{cases} \tan\theta = x \\ \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\end{cases}$
$\forall x \in]-1,1[$, $\text{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\forall x \in]-1,1[$, $\text{Arccos}'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\forall x \in \mathbb{R}$, $\text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$

Intégration sur un segment

Sommes de Riemann sur $[0,1]$. Soit f continue sur le segment $[0,1]$.
Alors $\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 f$ et $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} \int_0^1 f$.

Théorème fondamental de l'intégration. Soit f continue sur un intervalle I et soit $a \in I$.
Alors $F : x \mapsto \int_a^x f$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et vérifie $F'(x) = f(x)$, pour tout $x \in I$.

Dérivée de $G : x \mapsto \int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$. Soit f continue sur un intervalle I. Soient $u, v : J \to I$ dérivables.
Alors $G : x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$ est définie et dérivable sur J :

$$\forall x \in J, \quad G'(x) = v'(x) \cdot f[v(x)] - u'(x) \cdot f[u(x)].$$

Intégration sur un intervalle quelconque

Définition de la cv d'une intégrale sur $[a,b[$. Soit $f \in \mathscr{C}([a,b[,\mathbb{R})$. L'intégrale $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ est dite convergente si $x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ possède une limite finie en b.

CVA d'une intégrale, intégrabilité. $\int_I f$ est dite absolument convergente ou f est dite intégrable sur I si $\int_I |f|$ cv. Dans ce cas, $\int_I f$ est également convergente.

Intégrales de référence. $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ cv ssi $\alpha > 1$; $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ cv ssi $\alpha < 1$; $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t$ cv ssi $\lambda > 0$; $\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$ cv.

Caractérisation de la cv des intégrales de fonctions positives. Soit f continue sur $[a,b[$ et positive.
Alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t$ cv ssi $x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est majorée sur $[a,b[$.

Critère de majoration/minoration des intégrales de fonctions positives. Soient f et g continues sur $[a,b[$ vérifiant $0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$, pour tout $t \in [a,b[$.
Alors : si l'intégrale $\int_a^b g$ cv, alors l'intégrale $\int_a^b f$ cv; si l'intégrale $\int_a^b f$ dv, alors l'intégrale $\int_a^b g$ dv.

Critère d'équivalence des intégrales de fonctions positives. Soient f et g continues sur $[a,b[$, positives et vérifiant $f(t) \underset{b}{\sim} g(t)$.
Alors : $\int_a^b f$ cv ssi $\int_a^b g$ cv.

Critère de négligeabilité/domination pour les fonctions intégrables. Soient $f,g : [a,b[\to \mathbb{K}$ continues sur $[a,b[$ et vérifiant $f(t) = o_b[g(t)]$ ou $f(t) = O_b[g(t)]$. Alors, si g est intégrable sur $[a,b[$, f l'est également.

Intégration par parties. Soient u et v deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur I. Si le crochet $\Big[uv\Big]_a^b$ converge, les intégrales $\int_a^b u'v$ et $\int_a^b uv'$ sont de même nature. En cas de convergence :

$$\int_a^b u'v = \Big[uv\Big]_a^b - \int_a^b uv', \quad \text{où} \quad \Big[uv\Big]_a^b = \Big(\lim_b uv\Big) - \Big(\lim_a uv\Big).$$

Changement de variable $u = \varphi(t)$. Soient $\varphi : J \to I$ de classe $\mathscr{C}^1$ et strictement monotone, et $f : I \to \mathbb{K}$ continue. Alors les intégrales $\int_J f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$ et $\int_I f(u)du$ sont de même nature. En cas de convergence :

$$\int_I f(u)\mathrm{d}u = \begin{cases} \int_J f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t & \text{si } \varphi \text{ est strictement croissante,} \\ -\int_J f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t & \text{si } \varphi \text{ est strictement décroissante.} \end{cases}$$

Programme détaillé

Liste des exigibles

— mettre en évidence une impropreté dans une intégrale généralisée ;

— connaître les intégrales de référence ;

— pouvoir établir la convergence d'une intégrale ou l'intégrabilité d'une fonction au voisinage d'un point via les théorèmes de comparaison ;

— pouvoir mettre en pratique une intégration par parties sur un intervalle quelconque ;

— pouvoir mettre en pratique un changement de variable sur un intervalle quelconque.

I) Intégrale d'une fonction continue sur un segment

II) Intégration d'une fonction continue sur un intervalle quelconque

1) Intégration sur un intervalle semi-ouvert

- Soit $f \in \mathscr{C}([a,b[,\mathbb{K})$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f$ cv si $x \mapsto \int_a^x f$ possède une limite finie en b.
- On dit que $f \in \mathscr{C}([a,b[,\mathbb{K})$ est intégrable sur $[a,b[$ ou que l'intégrale $\int_a^b f$ cva si $\int_a^b |f|$ cv

2) Intégration sur un intervalle ouvert $]a,b[$

- Soit $f \in \mathscr{C}(]a,b[,\mathbb{K})$. On dit que l'intégrale $\int_a^b f$ cv si $x \mapsto \int_c^x$ possède une limite finie en a et b.

III) Étude de la nature de l'intégrale d'une fonction de signe constant

1) Intégrales de référence

- Intégrales de Riemann.
- — $\int_0^1 \mathrm{d}t/t^\alpha$ cv ssi $\alpha < 1$.
  — $\int_1^{+\infty} \mathrm{d}t/t^\alpha$ cv ssi $\alpha > 1$.
- $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t$ cv ssi $\lambda > 0$.
- $\int_0^1 \ln(t)\mathrm{d}t$ cv

2) Critères de comparaison pour les fonctions de signe constant au voisinage de l'impropreté

- Soit $f \in \mathscr{C}([a,b[,\mathbb{R})$ (resp $]a,b]$) positive au voisinage de b (resp. a). Alors $\int_a^b f$ cv ssi $x \mapsto \int_a^x f$ (resp. $x \mapsto \int_x^b f$) est majorée sur $[a,b[$ (resp. $]a,b]$).
- Critère de majoration/minoration.
- Critère d'équivalence.

IV) Propriétés des intégrales convergentes et intégrabilité

1) Propriétés des intégrales convergentes

- Soient $f,g \in \mathscr{C}(I,\mathbb{K})$.
  — Soit $\lambda \neq 0$. Alors $\int_I f$ et $\int_I (\lambda f)$ sont de même nature, et en cas de convergence $\int_I (\lambda f) = \lambda \int_I f$.
  — Si $\int_I f$ et $\int_I g$ cv, alors $\int_I (f+g)$ cv et $\int_I (f+g) = \int_I f + \int_I g$.
  — Si $\int_I f$ cv et $\int_I g$ dv, alors $\int_I (f+g)$ dv.
  — Si $\int_I f$ et $\int_I g$ dv, on ne peut pas conclure quant à la nature de $\int_I (f+g)$.
- Relation de Chasles.
- Intégration par parties.
- Changement de variable.

2) Fonctions intégrables

- On dit que f est intégrable sur I ou que $\int_I f$ converge absolument si $\int_I |f|$ cv.
- L'ensemble des fonctions continues et intégrables sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un sev de $\mathbb{K}^I$.
- Soit f une fonction continue sur I vérifiant $\int_I |f| = 0$. Alors $f = \tilde{0}$.
- Parties positive et négative d'une fonction.
- Convergence absolue implique convergence.
- Inégalité triangulaire.
- Critère de négligeabilité/domination.