Semaine 5 (13/10–17/10) : déterminants ; éléments propres

Consignes La colle débute par la restitution écrite d'un énoncé mathématique choisi par l'examinateur dans la liste fournie ci-après, et par le calcul sous forme factorisée d'un déterminant 3×3 ou 4×4 à paramètres. Ont été traités en classe :

— $\begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ b+c & c+a & a+b \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a-b-c & 2a & 2a \\ 2b & b-c-a & 2b \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sin a & \sin b & \sin c \\ \cos a & \cos b & \cos c \end{vmatrix}$;

— $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & z \\ a^2 & b^2 & c^2 & z^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & z^3 \end{vmatrix}$, $\begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}$;

— des calculs de polynômes caractéristiques de matrices de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

Tout ceci n'excèdera pas 10 minutes.

La colle se poursuivra par la résolution d'un ou plusieurs exercices fournis par l'examinateur dans le cadre des exigibles et du programme détaillé dans la suite.

Notation La connaissance du cours et le calcul déterminent la fourchette dans laquelle sera évalué l'étudiant :

— énoncé su et calcul correct : note minimale de 11/20 ;

— énoncé non su et calcul faux : note maximale de 7/20 ;

— autre situation : note comprise entre 8 et 14.

Les colleurs sont libres d'utiliser toutes les notes allant de 0 à 20 dans le respect des contraintes ci-dessus.

Énoncés

Déterminant d'une matrice carrée

Définition du déterminant matriciel. Le déterminant $n\times n$ est l'unique application f de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ vérifiant les points suivants :

(i) f est linéaire par rapport à chaque colonne ;

(ii) l'échange de deux colonnes multiplie la valeur de f par -1 ;

(iii) $f(I_n) = 1$.

Déterminant triangulaire. Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux.

Propriétés du déterminant. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, pour toutes matrices $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$:

— $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$;

— $\det(A^\top) = \det(A)$;

— $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ ssi $\det(A) \neq 0$ et dans ce cas $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$;

— $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(BA)$.

Développement par rapport à C_ℓ. $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+\ell} a_{i,\ell} \Delta_{i,\ell}$

Développement par rapport à L_k. $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{k,j} \Delta_{k,j}$

Éléments propres

Définition d'une valeur propre. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une vp de $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (resp. de $u \in \mathscr{L}(E)$) s'il existe un vecteur $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (resp. un vecteur $\vec{x} \in E$) non nul vérifiant $AX = \lambda X$ (resp. $u(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$).

Lien entre les vp et le polynôme caractéristique. Les vp de $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (resp. de $u \in \mathscr{L}(E)$ si $\dim E = n \in \mathbb{N}^*$) sont les racines de χ_A (resp. χ_u), où $\chi_A(t) = \det(tI_n - A) = t^n - \mathrm{tr}(A)t^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det A$.

Définition d'un vecteur propre. Le vecteur colonne $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (resp. le vecteur $\vec{x} \in E$) est un $\overrightarrow{\text{vp}}$ de $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (resp. de $u \in \mathscr{L}(E)$) associé à la vp $\lambda \in \mathbb{K}$ si X (resp $\vec{x}$) est non nul et si $AX = \lambda X$ (resp. $u(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$).

Définition d'un sous-espace propre. Pour toute vp $\lambda \in \mathbb{K}$ de $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (resp. de $u \in \mathscr{L}(E)$), on définit le sous-espace propre $E_\lambda(A)$ (resp. $E_\lambda(u)$) par $E_\lambda(A) = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) = \{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) : AX = \lambda X\}$ (resp. $E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_E) = \{\vec{x} \in E : u(\vec{x}) = \lambda \vec{x}\}$).

Propriétés des éléments propres

$\overrightarrow{\text{vp}}$ et droite stable. Un vecteur $\vec{x} \neq \overrightarrow{0_E}$ est un $\overrightarrow{\text{vp}}$ de $u \in \mathscr{L}(E)$ ssi la droite engendrée par $\vec{x}$ est stable par u.

Liberté des $\overrightarrow{\text{vp}}$. Toute famille de $\overrightarrow{\text{vp}}$ associés à des vp distinctes est libre. En conséquence, $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ possède au plus n vp distinctes. De même, si E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, $u \in \mathscr{L}(E)$ possède au plus n vp distinctes.

Somme de sep. Toute somme de sep associés à des vp distinctes est directe. En conséquence, si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim[E_\lambda(A)] \leqslant n$.

Multiplicité d'une valeur propre. Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $m(\lambda) = \max\{k \in \mathbb{N} : (X - \lambda)^k | \chi_A\}$.
De plus, $1 \leqslant \dim[E_\lambda(A)] \leqslant m(\lambda)$.

Programme détaillé

Liste des exigibles

- connaître l'interprétation géométrique d'un déterminant 2×2 ;
- connaître les propriétés du déterminant matriciel ;
- maîtriser les techniques de calculs de déterminants par combinaison linéaire et par développement par rapport à une ligne ou une colonne ;
- connaître la définition d'une valeur propre, d'un vecteur propre et d'un sous-espace propre ;
- savoir déterminer les valeurs propres à l'aide du polynôme caractéristique ;
- savoir déterminer la dimension d'un sous-espace propre.

Chap 3 : déterminants

I) Déterminants 2×2

1) Aire orientée

- Interprétation du déterminant 2×2 comme l'aire algébrique d'un parallélogramme.

2) Propriétés du déterminant 2×2

- Illustrations géométriques des propriétés du déterminant 2×2.

II) Déterminant d'une matrice carrée et d'un endomorphisme

1) Déterminant d'une matrice carrée et propriétés
- Le déterminant $n \times n$ est l'unique application f de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ vérifiant les points suivants :
  (i) f est linéaire par rapport à chaque colonne;
  (ii) l'échange de deux colonnes multiplie la valeur de f par -1;
  (iii) $f(I_n) = 1$.
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$
- Si une matrice contient deux lignes ou deux colonnes identiques, son déterminant est nul.
- Quand on ajoute à une colonne (resp. une ligne) une combinaison linéaire des autres, on ne change pas la valeur du déterminant d'une matrice.
- Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux.
- $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(BA)$
- Si une matrice contient deux lignes ou deux colonnes identiques, son déterminant est nul.
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$
- Une matrice A est inversible ssi $\det(A) \neq 0$.
- Si A est inversible, $\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}$.
- $\det(A) = \det\left(A^\top\right)$.
- Deux matrices semblables ont le même déterminant.

2) Mineurs et développement par rapport à une ligne ou une colonne
- Mineur $\Delta_{k,\ell}$ défini comme le déterminant de la matrice extraite de A en supprimant la k-ième ligne et la ℓ-colonne.
- Développement par rapport à C_ℓ : $\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+\ell} a_{i,\ell}\Delta_{i,\ell}$
- Développement par rapport à L_k : $\det(A) = \sum_{j=1}^n (-1)^{k+j} a_{k,j}\Delta_{k,j}$

3) Déterminant d'un endomorphisme
- Le déterminant d'un endomorphisme est le déterminant de n'importe laquelle de ses représentations matricielles dans une base.
- $\det(f \circ g) = \det(f)\det(g) = \det(g \circ f)$.
- $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$.
- $f \in \mathrm{GL}(E)$ ssi $\det(f) \neq 0$.

4) Déterminant d'une famille de vecteurs relativement à une base
- $\det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{u}_1, \dots, \overrightarrow{u}_n) = \det\left[\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{u}_1, \dots, \overrightarrow{u}_n)\right]$.
- $\mathscr{B}' = (\overrightarrow{e}'_1, \dots, \overrightarrow{e}'_n)$ est une base de E ssi $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') \neq 0$.

Chap 4 : réduction

I) Éléments propres d'une matrice et d'un endomorphisme

1) Éléments propres d'une matrice
- Définition d'une valeur propre.
- Les propositions suivantes sont équivalentes :
  i) λ est vp de A;
  ii) $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{0\}$;
  iii) $\mathrm{rg}(A - \lambda I_n) < n$;
  iv) $A - \lambda I_n \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$;
  v) $\det(A - \lambda I_n) = 0$.
- Polynôme caractéristique : $\chi_A(t) = \det(tI_n - A)$ de degré n et unitaire.
- Les vp de A sont les racines de χ_A.
- 0 est vp de A ssi A n'est pas inversible.
- Si A est triangulaire, alors ses vp sont ses coefficients diagonaux.
- Définition du spectre $\mathrm{Sp}(A)$ de A.
- Définition d'un vecteur propre, d'un sous-espace propre.
- Toute famille de $\overrightarrow{\mathrm{vp}}$ de A associés à des vp distinctes est libre.
- A possède au plus n vp distinctes.
- La somme des sep de A est directe.
- La somme des dimensions des sep de A est inférieur ou égal à n.
- Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.
- Multiplicité d'une vp; inégalité $1 \leqslant \dim E_\lambda \leqslant m(\lambda)$.

2) Éléments propres d'un endomorphisme

a) Généralités
- Définition des éléments propres.

b) Cas de la dimension finie
- Spectre de u.
- Soient $\mathscr{B}$ une base de E et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$.
  — $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ ssi $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$;
  — $\overrightarrow{x} \in E_\lambda(u)$ ssi $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{x}) \in E_\lambda(A)$.
- Transposition aux endomorphismes des résultats vus pour les matrices.