Semaine 5 (04/11–08/11) : déterminants et réduction

Consignes. La colle débute par la restitution écrite d'énoncés mathématiques choisis par l'examinateur dans la liste fournie ci-après. Cette restitution n'excèdera pas 10 minutes sinon les énoncés manquants seront considérés comme non sus. Pour cette semaine :

— 1 énoncé pioché dans « déterminant d'une matrice carrée ».

— 1 énoncé pioché dans « racines d'un polynôme ».

— 1 énoncé pioché dans « éléments propres ».

— 1 énoncé pioché dans « propriétés des éléments propres ».

— 1 énoncé pioché dans « réduction ».

La colle se poursuivra par la résolution d'un ou plusieurs exercices fournis par l'examinateur dans le cadre des exigibles et du programme détaillé dans la suite.

Petite précision. Un seul td sur la diagonalisation a été fait, un autre suivra le mercredi 06/11.

Notation. La connaissance du cours détermine la fourchette dans laquelle sera évalué l'étudiant :

— 5 énoncés sus : note minimale de 9/20;

— 1 énoncé erroné ou non su : note maximale de 13/20;

— 2 énoncés erronés ou non sus : note maximale de 9/20;

— au moins 3 énoncés erronés ou non sus : note maximale de 5/20.

Les colleurs sont libres d'utiliser toutes les notes allant de 0 à 20 dans le respect des contraintes ci-dessus.

Énoncés

Déterminant d'une matrice carrée

Définition du déterminant matriciel. Le déterminant $n \times n$ est l'unique application f de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ vérifiant les points suivants :

(i) f est linéaire par rapport à chaque colonne;

(ii) l'échange de deux colonnes multiplie la valeur de f par -1;

(iii) $f(I_n) = 1$.

Déterminant triangulaire. Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux.

Propriétés du déterminant. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, pour toutes matrices A et B de taille $n \times n$:

— $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$;

— $\det(A^\top) = \det(A)$;

— $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ ssi $\det(A) \neq 0$ et dans ce cas $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$;

— $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(BA)$.

Développement par rapport à C_ℓ. $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+\ell} a_{i,\ell} \Delta_{i,\ell}$

Développement par rapport à L_k. $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{k,j} \Delta_{k,j}$

Racines d'un polynôme

Racine et multiplicité. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est racine d'un polynôme P si $P(\lambda) = 0$. Dans ce cas, on appelle multiplicité m de λ le plus grand entier k tel que $(X-\lambda)^k$ divise $P(X)$ (pour P non nul).
Cet entier m est caractérisée par : $\forall k \in [\![0, m-1]\!]$, $P^{(k)}(\lambda) = 0$ et $P^{(m)}(\lambda) \neq 0$.

Polynôme scindé. Un polynôme est dit scindé sur $\mathbb{R}$ (resp. sur $\mathbb{C}$) s'il s'écrit comme un produit de facteurs de degré 1 à cœfficients dans $\mathbb{R}$ (resp. dans $\mathbb{C}$).
Le théorème de d'Alembert-Gauss assure que tout polynôme est scindé sur $\mathbb{C}$.

Polynôme scindé à racines simples. Un polynôme est dit scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$ (resp. sur $\mathbb{C}$) s'il est scindé sur $\mathbb{R}$ (resp. sur $\mathbb{C}$) et si toutes ses racines sont simples.
C'est le cas si P est scindé sur $\mathbb{R}$ (resp. sur $\mathbb{C}$) et si P et P' n'ont pas de racines communes.

Éléments propres

Définition d'une valeur propre. $\lambda \in \mathbb{K}$ est une vp pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (resp. pour $u \in \mathscr{L}(E)$) s'il existe un vecteur colonne $X \neq 0$ (resp. un vecteur $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0_E}$) vérifiant $AX = \lambda X$ (resp. $u(\overrightarrow{x}) = \lambda \overrightarrow{x}$).

Lien entre les vp et le polynôme caractéristique. Les vp de $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (resp. de $u \in \mathscr{L}(E)$ si $\dim E = n \in \mathbb{N}^*$) sont les racines de χ_A (resp. χ_u), où $\chi_A(t) = \det(tI_n - A) = t^n - \mathrm{tr}(A)\,t^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det A$.

Définition d'un vecteur propre. Le vecteur colonne X (resp. le vecteur $\overrightarrow{x}$) est un $\overrightarrow{\text{vp}}$ de $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ (resp. de $u \in \mathscr{L}(E)$) associé à la vp $\lambda \in \mathbb{K}$ si $X \neq 0_{n,1}$ (resp si $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0_E}$) et si $AX = \lambda X$ (resp. $u(\overrightarrow{x}) = \lambda \overrightarrow{x}$).

Définition d'un sous-espace propre. pour toute vp $\lambda \in \mathbb{K}$, $E_\lambda(A) = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) = \{X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \,:\, AX = \lambda X\}$ et $E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_E) = \{\overrightarrow{x} \in E \,:\, u(\overrightarrow{x}) = \lambda \overrightarrow{x}\}$

Propriétés des éléments propres

$\overrightarrow{\text{vp}}$ et droite stable. Un vecteur $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0_E}$ est un $\overrightarrow{\text{vp}}$ de $u \in \mathscr{L}(E)$ ssi la droite engendrée par $\overrightarrow{x}$ est stable par u.

Liberté des $\overrightarrow{\text{vp}}$. Toute famille de $\overrightarrow{\text{vp}}$ associés à des vp distinctes est libre.

Somme de sep. Toute somme de sep associés à des vp distinctes est directe.

Nombre de vp distinctes. $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ possède au plus n vp distinctes. Si $\dim E < +\infty$, $u \in \mathscr{L}(E)$ possède au plus $\dim E$ vp distinctes.

Multiplicités algébrique et géométrique d'une vp. $m_a(\lambda) := \max\left\{k \in \mathbb{N} \,:\, (X-\lambda)^k | \chi_A\right\}$; $m_g(\lambda) := \dim E_\lambda(A)$.
Pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$, $1 \leqslant m_g(\lambda) \leqslant m_a(\lambda)$.

Réduction

Définition de la dz. $u \in \mathscr{L}(E)$ est dz s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est diagonale. $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est dz si elle est semblable à une matrice diagonale.

Caractérisation de la dz. $u \in \mathscr{L}(E)$ est dz ssi il existe une base de E formée de $\overrightarrow{\text{vp}}$ de u.

CNS de dz portant sur les sep. $u \in \mathscr{L}(E)$ (resp. $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$) est dz ssi la somme des dimensions de ses sep est égale à $\dim E$ (resp. n).

CNS de dz portant sur χ. $u \in \mathscr{L}(E)$ (resp. $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$) est dz ssi χ_u (resp. χ_A) est scindé et $m_g(\lambda) = m_a(\lambda)$ pour toute vp λ de u (resp. A).

CS de dz portant sur χ. Si χ_u (resp. χ_A) est SRS alors $u \in \mathscr{L}(E)$ (resp. $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$) est dz et ses sep sont tous de dimension 1.

Programme détaillé

Liste des exigibles

— connaître l'interprétation géométrique d'un déterminant 2×2 et 3×3 ;

— savoir calculer un déterminant 2×2 et 3×3 ;

— connaître les propriétés du déterminant matriciel ;

— maîtriser les techniques de calculs de déterminants par combinaison linéaire et par développement par rapport à une ligne ou une colonne ;

— connaître la définition d'une valeur propre, d'un vecteur propre et d'un sous-espace propre ;

— savoir déterminer les valeurs propres à l'aide du polynôme caractéristique dans des cas simples ;

— connaître la définition de la diagonalisabilité ;

— savoir démontrer qu'une matrice est ou n'est pas diagonalisable ;

— savoir diagonaliser ou trigonaliser une matrice dans des cas simples.

Chap 4 : déterminants

I) Déterminants 2×2

1) Aire orientée

- Interprétation du déterminant 2×2 comme l'aire algébrique d'un parallélogramme.

2) Propriétés du déterminant 2×2

- Illustrations géométriques des propriétés du déterminant 2×2.

II) Déterminant d'une matrice carrée et d'un endomorphisme

1) Déterminant d'une matrice carrée et propriétés

- Le déterminant $n \times n$ est l'unique application f de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ dans $\mathbb{K}$ vérifiant les points suivants :
  (i) f est linéaire par rapport à chaque colonne ;
  (ii) l'échange de deux colonnes multiplie la valeur de f par -1 ;
  (iii) $f(I_n) = 1$.
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$
- Si une matrice contient deux lignes ou deux colonnes identiques, son déterminant est nul.
- Quand on ajoute à une colonne (resp. une ligne) une combinaison linéaire des autres, on ne change pas la valeur du déterminant d'une matrice.
- Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux.
- $\det(AB) = \det(A)\det(B) = \det(BA)$
- Si une matrice contient deux lignes ou deux colonnes identiques, son déterminant est nul.
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$
- Une matrice A est inversible ssi $\det(A) \neq 0$.
- Si A est inversible, $\det\left(A^{-1}\right) = \frac{1}{\det(A)}$.
- $\det(A) = \det\left(A^{\top}\right)$.
- Deux matrices semblables ont le même déterminant.

2) Mineurs et développement par rapport à une ligne ou une colonne

- Mineur $\Delta_{k,\ell}$ défini comme le déterminant de la matrice extraite de A en supprimant la k-ième ligne et la ℓ-colonne.
- Développement par rapport à C_ℓ : $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+\ell} a_{i,\ell} \Delta_{i,\ell}$
- Développement par rapport à L_k : $\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{k,j} \Delta_{k,j}$

3) Déterminant d'un endomorphisme

- Le déterminant d'un endomorphisme est le déterminant de n'importe laquelle de ses représentations matricielles dans une base.
- $\det(f \circ g) = \det(f)\det(g) = \det(g \circ f)$.
- $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$.
- $f \in \mathrm{GL}(E)$ ssi $\det(f) \neq 0$.

4) Déterminant d'une famille de vecteurs relativement à une base

- $\det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_n) = \det\left[\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{u}_1, \ldots, \overrightarrow{u}_n)\right]$.
- $\mathscr{B}' = (\overrightarrow{e}'_1, \ldots, \overrightarrow{e}'_n)$ est une base de E ssi $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') \neq 0$.

Chap 5 : réduction

I) Éléments propres d'une matrice et d'un endomorphisme

1) Éléments propres d'une matrice

- $\lambda \in \mathbb{K}$ est vp de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ si : $\exists X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}), X \neq 0_{n,1}$ et $AX = \lambda X$.
- Les propositions suivantes sont équivalentes :
  i) λ est vp de A ;
  ii) $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{0\}$;
  iii) $\mathrm{rg}(A - \lambda I_n) < n$;
  iv) $A - \lambda I_n \notin \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$;
  v) $\det(A - \lambda I_n) = 0$.
- Polynôme caractéristique : $\chi_A(t) = \det(tI_n - A)$ de degré n et unitaire.
- Les vp de A sont les racines de χ_A.
- 0 est vp de A ssi A n'est pas inversible.
- Si A est triangulaire, alors ses vp sont ses coefficients diagonaux.
- Définition du spectre $\mathrm{Sp}(A)$ de A.
- $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est $\overrightarrow{\mathrm{vp}}$ de A si : $X \neq 0$ et $\exists \lambda \in \mathbb{K}, AX = \lambda X$.
- Sep $E_\lambda(A) = \mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) = \left\{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) : AX = \lambda X\right\}$
- Toute famille de $\overrightarrow{\mathrm{vp}}$ de A associés à des vp distinctes est libre.
- A possède au plus n vp distinctes.
- La somme des sep de A est directe.
- La somme des dimensions des sep de A est inférieur ou égal à n.
- Multiplicités algébrique et géométrique d'une vp ; $1 \leqslant m_g \leqslant m_a$.

2) Éléments propres d'un endomorphisme

a) Généralités

- $\lambda \in \mathbb{K}$ est vp de u si : $\exists \vec{x} \in E, \vec{x} \neq \vec{0}_E$ et $u(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$.
- $\vec{x} \in E$ est $\overrightarrow{\mathrm{vp}}$ de u si : $\vec{x} \neq \vec{0}_E$ et $\exists \lambda \in \mathbb{K}, u(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$.
- $\vec{x} \neq \overrightarrow{0_E}$ est un $\overrightarrow{\mathrm{vp}}$ de u ssi $D = \mathrm{Vect}(\vec{x})$ est stable par u.
- Sep $E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda \mathrm{id}_E) = \left\{\vec{x} \in E : u(x) = \lambda \vec{x}\right\}$
- Toute famille de $\overrightarrow{\mathrm{vp}}$ de u associés à des vp distinctes est libre.
- Toute somme finie de sep associés à des vp distinctes est directe.

b) Cas de la dimension finie

- Spectre de u.
- Soient $\mathscr{B}$ une base de E et $A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$.
  — $\lambda \in \mathrm{Sp}(u)$ ssi $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$;
  — $\vec{x} \in E_\lambda(u)$ ssi $X = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(x) \in E_\lambda(A)$.
- u possède au plus $\dim(E)$ valeurs propres distinctes.
- Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.
- Polynôme caractéristique de u défini comme le polynôme caractéristique de n'importe laquelle de ses représentations matricielles dans une base.
- En dimension finie, les vp d'un endomorphisme sont les racines de son polynôme caractéristique.
- Toute somme de sep de u associés à des vp distinctes est directe.
- La somme des dimensions des sep de u est inférieur ou égal à n.
- Multiplicités algébrique et géométrique d'une vp ; $1 \leqslant m_g \leqslant m_a$.

II) Réduction

1) Diagonalisation des endomorphismes

- u est dz lorsqu'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est diagonale.
- u est dz ssi il existe une base de E formée de $\overrightarrow{\mathrm{vp}}$ de u.
- u est dz ssi la somme des dimensions de ses sep est égale à $\dim E$ (pv admise).
- u est dz ssi χ_u est scindé et la multiplicité algébrique de chaque vp de u est égale à la dimension du sep associé (pv admise).
- Si u possède n vp distinctes deux à deux, alors u est dz et ses sep sont tous de dimension 1. C'est en particulier le cas si χ_u est srs.

2) Diagonalisation des matrices carrées

- A est dz si elle est semblable à une matrice diagonale.
- A est dz ssi l'endomorphisme canoniquement associé à A est dz.
- La trace et le déterminant d'une matrice dz sont respectivement la somme et le produit de ses vp comptées avec leurs multiplicités.
- A est dz ssi la somme des dimensions de ses sep est égale à n (pv admise).

- A est dz ssi χ_A est scindé et la multiplicité algébrique de chaque valeur propre de A est égale à la dimension du sep associé (pv admise).
- Si A possède n vp distinctes deux à deux, alors A est dz et ses sep sont tous de dimension 1. C'est en particulier le cas si χ_A est srs.
- Si A est triangulaire avec tous ses coefficients diagonaux deux à deux distincts, alors A est dz.
- Deux matrices semblables ont le même spectre.

3) Trigonalisation

- u est dit tz lorsqu'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est triangulaire.
- u est tz ssi son polynôme caractéristique est scindé. (pv admise)
- A est tz si elle est semblable à une matrice triangulaire.
- La trace et le déterminant d'une matrice tz sont respectivement la somme et le produit de ses vp comptées avec leurs multiplicités algébriques.
- Exemple de trigonalisation d'une matrice 2×2.
- Exemple de trigonalisation d'une matrice 3×3.

4) Applications

- Puissances d'une matrice dz.