Semaine 6 (03/11-07/11): déterminants; diagonalisation

Consignes La colle débute par la restitution écrite d'un énoncé mathématique choisi par l'examinateur dans la liste fournie ci-après, et par la recherche des éléments propres d'une matrice 3×3 (valeurs propres et sous-espaces propres).

Tout ceci n'excèdera pas 20 minutes.

La colle se poursuivra par la résolution d'un ou plusieurs exercices fournis par l'examinateur dans le cadre des exigibles et du programme détaillé dans la suite.

 $\underline{\wedge}$ Bien que le cours sur la trigonalisation ait été traité et des exemples présentés, on évitera les exercices de trigonalisation cette semaine.

Notation La connaissance du cours et le calcul déterminent la fourchette dans laquelle sera évalué l'étudiant :

- énoncé su et calcul correct : note minimale de 11/20;
- énoncé non su et calcul faux : note maximale de 7/20;
- autre situation : note comprise entre 8 et 14.

Les colleurs sont libres d'utiliser toutes les notes allant de 0 à 20 dans le respect des contraintes ci-dessus.

Énoncés

Déterminant d'une matrice carrée

<u>Définition du déterminant matriciel</u>. Le déterminant $n \times n$ est l'unique application f de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans \mathbb{K} vérifiant les points suivants :

- (i) f est linéaire par rapport à chaque colonne;
- (ii) l'échange de deux colonnes multiplie la valeur de f par -1;
- (iii) $f(I_n) = 1$.

<u>Déterminant triangulaire</u>. Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux.

Propriétés du déterminant. Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, pour toutes matrices $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A);$
- $-\det(A^{\mathsf{T}}) = \det(A)$:
- $A \in GL_n(\mathbb{K})$ ssi det(A) ≠ 0 et dans ce cas det(A^{-1}) = 1/det(A);
- det(AB) = det(A) det(B) = det(BA).

<u>Développement par rapport à C_{ℓ} </u>. $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+\ell} a_{i,\ell} \Delta_{i,\ell}$

<u>Développement par rapport à L_k </u>. $det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{k,j} \Delta_{k,j}$

Éléments propres

<u>Définition d'une valeur propre</u>. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une vp de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (resp. de $u \in \mathcal{L}(E)$) s'il existe un vecteur $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (resp. un vecteur $x \in E$) non nul vérifiant $AX = \lambda X$ (resp. $u(x) = \lambda x$).

<u>Lien entre les vp et le polynôme caractéristique</u>. Les vp de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (resp. de $u \in \mathcal{L}(E)$ si dim $E = n \in \mathbb{N}^*$) sont les racines de χ_A (resp. χ_u), où $\chi_A(t) = \det(tI_n - A) = t^n - \operatorname{tr}(A)t^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det A$.

<u>Définition d'un vecteur propre</u>. Le vecteur colonne $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ (resp. le vecteur $\overrightarrow{x} \in E$) est un \overrightarrow{vp} de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (resp. de $u \in \mathcal{L}(E)$) associé à la vp $\lambda \in \mathbb{K}$ si X (resp. x) est non nul et si $AX = \lambda X$ (resp. $u(x) = \lambda x$).

<u>Définition d'un sous-espace propre</u>. Pour toute vp $\lambda \in \mathbb{K}$ de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ (resp. de $u \in \mathcal{L}(E)$), on définit le sous-espace propre $E_{\lambda}(A)$ (resp. $E_{\lambda}(u)$) par $E_{\lambda}(A) = \operatorname{Ker}(A - \lambda I_n) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) : AX = \lambda X\}$ (resp. $E_{\lambda}(u) = \operatorname{Ker}(u - \lambda \operatorname{id}_E) = \{x \in E : u(x) = \lambda x\}$).

Propriétés des éléments propres

 $\overrightarrow{\mathrm{vp}}$ et droite stable. Un vecteur $\overrightarrow{x} \neq \overrightarrow{0_E}$ est un $\overrightarrow{\mathrm{vp}}$ de $u \in \mathcal{L}(E)$ ssi la droite engendrée par \overrightarrow{x} est stable par u. Liberté des $\overrightarrow{\mathrm{vp}}$. Toute famille de $\overrightarrow{\mathrm{vp}}$ associés à des vp distinctes est libre. En conséquence, $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ possède au plus n vp distinctes. De même, si E est de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$, $u \in \mathcal{L}(E)$ possède au plus n vp distinctes. Somme de sep. Toute somme de sep associés à des vp distinctes est directe. En conséquence, si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, alors $\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim[E_\lambda(A)] \leqslant n$.

Multiplicité d'une valeur propre. Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \operatorname{Sp}(A)$, $m(\lambda) = \max\{k \in \mathbb{N} : (X - \lambda)^k | \chi_A\}$. De plus, $1 \leq \dim[E_{\lambda}(A)] \leq m(\lambda)$.

Réduction

<u>Définition de la dz</u>. $u \in \mathcal{L}(E)$ est dz s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est diagonale. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dz si elle est semblable à une matrice diagonale.

<u>Caractérisation de la dz</u>. $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) est dz ssi il existe une base de E (resp de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$) formée de \overrightarrow{vp} de u (resp. de A).

<u>CNS</u> de dz portant sur les sep. $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) est dz ssi la somme des dimensions de ses sep est égale à dimE (resp. n).

CNS de dz portant sur χ . $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) est dz ssi son polynôme caractéristique est scindé et la multiplicité de chaque valeur propre est égale à la dimension du sous-espace propre associé.

<u>CS</u> de dz. Si $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) possède n valeurs propres deux à deux distinctes, alors u (resp. A) est dz. C'est le cas si χ_u (resp. χ_A) est scindé à racines simples.

Programme détaillé

Liste des exigibles

- connaître l'interprétation géométrique d'un déterminant 2 × 2;
- connaître les propriétés du déterminant matriciel;
- maîtriser les techniques de calculs de déterminants par combinaison linéaire et par développement par rapport à une ligne ou une colonne;

- connaître la définition d'une valeur propre, d'un vecteur propre et d'un sous-espace propre;
- savoir déterminer les valeurs propres à l'aide du polynôme caractéristique;
- savoir déterminer la dimension d'un sous-espace propre.

Chap 3: déterminants

- I) Déterminants 2 × 2
 - 1) Aire orientée
 - Interprétation du déterminant 2 × 2 comme l'aire algébrique d'un parallélogramme.
 - 2) Propriétés du déterminant 2 × 2
 - Illustrations géométriques des propriétés du déterminant 2 × 2.
- II) Déterminant d'une matrice carrée et d'un endomorphisme
 - 1) Déterminant d'une matrice carrée et propriétés
 - Le déterminant $n \times n$ est l'unique application f de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ dans \mathbb{K} vérifiant les points suivants :
 - (i) f est linéaire par rapport à chaque colonne;
 - (ii) l'échange de deux colonnes multiplie la valeur de f par -1;

(iii)
$$f(I_n) = 1$$
.

- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$
- Si une matrice contient deux lignes ou deux colonnes identiques, son déterminant est nul.
- Quand on ajoute à une colonne (resp. une ligne) une combinaison linéaire des autres, on ne change pas la valeur du déterminant d'une matrice.
- Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux.
- det(AB) = det(A) det(B) = det(BA)
- Si une matrice contient deux lignes ou deux colonnes identiques, son déterminant est nul.
- $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$
- Une matrice A est inversible ssi $det(A) \neq 0$.
- Si A est inversible, $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.
- $\det(A) = \det(A^{\mathsf{T}}).$
- Deux matrices semblables ont le même déterminant.
- 2) Mineurs et développement par rapport à une ligne ou une colonne
- Mineur $\Delta_{k,\ell}$ défini comme le déterminant de la matrice extraite de A en supprimant la k-ième ligne et la ℓ -colonne.

- Développement par rapport à C_{ℓ} : $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+\ell} a_{i,\ell} \Delta_{i,\ell}$
- Développement par rapport à L_k : $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{k,i} \Delta_{k,j}$
- 3) Déterminant d'un endomorphisme
- Le déterminant d'un endomorphisme est le déterminant de n'importe laquelle de ses représentations matricielles dans une base.
- $\det(f \circ g) = \det(f) \det(g) = \det(g \circ f)$.
- $\det(\lambda f) = \lambda^n \det(f)$.
- $f \in GL(E)$ ssi $det(f) \neq 0$.
- 4) Déterminant d'une famille de vecteurs relativement à une base
- $\det_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{u}_1, \dots, \overrightarrow{u}_n) = \det \left[\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{u}_1, \dots, \overrightarrow{u}_n) \right].$
- $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{e}'_1, ..., \overrightarrow{e}'_n)$ est une base de E ssi $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \neq 0$.

Chap 4: réduction

- Íléments propres d'une matrice et d'un endomorphisme
 - 1) Éléments propres d'une matrice
 - Définition d'une valeur propre.
 - Les propositions suivantes sont équivalentes :
 - i) λ est vp de A;
 - ii) $\operatorname{Ker}(A \lambda I_n) \neq \{0\}$;
 - iii) $\operatorname{rg}(A \lambda I_n) < n$;
 - iv) $A \lambda I_n \notin GL_n(\mathbb{K})$;
 - v) $\det(A \lambda I_n) = 0$.
 - Polynôme caractéristique : $\chi_A(t) = \det(tI_n A)$ de degré n et unitaire.
 - Les vp de A sont les racines de χ_A .
 - 0 est vp de *A* ssi *A* n'est pas inversible.
 - Si *A* est triangulaire, alors ses vp sont ses coefficients diagonaux.
 - Définition du spectre Sp(*A*) de *A*.
 - Définition d'un vecteur propre, d'un sous-espace propre.
 - Toute famille de \overrightarrow{vp} de A associés à des vp distinctes est libre.
 - A possède au plus n vp distinctes.

- La somme des sep de A est directe.
- La somme des dimensions des sep de *A* est inférieur ou égal à *n*.
- Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.
- Multiplicité d'une vp; inégalité $1 \leq \dim E_{\lambda} \leq m(\lambda)$.
- 2) Éléments propres d'un endomorphisme
- a) Généralités
- Définition des éléments propres.
- b) Cas de la dimension finie
- Spectre de *u*.
- Soient \mathcal{B} une base de E et $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.
 - $-\lambda \in \operatorname{Sp}(u) \operatorname{ssi} \lambda \in \operatorname{Sp}(A);$
 - $\overrightarrow{x} \in E_{\lambda}(u) \text{ ssi } X = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{x}) \in E_{\lambda}(A).$
- Transposition aux endomorphismes des résultats vus pour les matrices.
- II) Réduction
 - 1) Diagonalisation des endomorphismes
 - *u* est dz lorsqu'il existe une base de *E* dans laquelle sa matrice est diagonale.
 - *u* est dz ssi il existe une base de *E* formée de \overrightarrow{vp} de *u*.
 - *u* est dz ssi la somme des dimensions de ses sep est égale à dim*E* (pv admise).

- u est dz ssi χ_u est scindé et la multiplicité algébrique de chaque vp de u est égale à la dimension du sep associé (pv admise).
- Si u possède n vp distinctes deux à deux, alors u est dz et ses sep sont tous de dimension 1. C'est en particulier le cas si χ_u est srs.
- 2) Diagonalisation des matrices carrées
- A est dz si elle est semblable à une matrice diagonale
- A est dz ssi l'endomorphisme canoniquement associé à A est dz.
- La trace et le déterminant d'une matrice dz sont respectivement la somme et le produit de ses vp comptées avec leurs multiplicités.
- A est dz ssi la somme des dimensions de ses sep est égale à n (pv admise).
- A est dz ssi χ_A est scindé et la multiplicité algébrique de chaque valeur propre de A est égale à la dimension du sep associé (pv admise).
- Si A possède n vp distinctes deux à deux, alors A est dz et ses sep sont tous de dimension 1. C'est en particulier le cas si χ_A est srs.
- Si *A* est triangulaire avec tous ses coefficients diagonaux deux à deux distincts, alors *A* est dz.