Semaine 7 (10/11-14/11): réduction et un peu de séries à termes positifs

Consignes La colle débute par la restitution écrite d'un énoncé mathématique choisi par l'examinateur dans la liste fournie ci-après, et par l'étude de la nature d'une sàtp via un théorème de comparaison.

Tout ceci n'excèdera pas 10 minutes.

La colle se poursuivra par la résolution d'un ou plusieurs exercices fournis par l'examinateur dans le cadre des exigibles et du programme détaillé dans la suite.

Notation La connaissance du cours et l'étude déterminent la fourchette dans laquelle sera évalué l'étudiant :

- énoncé su et étude correcte : note minimale de 11/20;
- énoncé non su et étude incorrecte : note maximale de 7/20;
- autre situation : note comprise entre 8 et 14.

Les colleurs sont libres d'utiliser toutes les notes allant de 0 à 20 dans le respect des contraintes ci-dessus.

Énoncés

Réduction

<u>Définition de la dz</u>. $u \in \mathcal{L}(E)$ est dz s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est diagonale. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dz si elle est semblable à une matrice diagonale.

<u>Caractérisation de la dz.</u> $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) est dz ssi il existe une base de E (resp de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$) formée de \overrightarrow{vp} de u (resp. de A).

<u>CNS</u> de dz portant sur les sep. $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) est dz ssi la somme des dimensions de ses sep est égale à dimE (resp. n).

<u>CNS</u> de dz portant sur χ . $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) est dz ssi son polynôme caractéristique est scindé et la multiplicité de chaque valeur propre est égale à la dimension du sous-espace propre associé.

<u>CS de dz.</u> Si $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) possède n valeurs propres deux à deux distinctes, alors u (resp. A) est dz. C'est le cas si χ_u (resp. χ_A) est scindé à racines simples.

<u>Définition de la tz</u>. $u \in \mathcal{L}(E)$ est tz s'il existe une base de E dans laquelle sa matrice est triangulaire. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est tz si elle est semblable à une matrice triangulaire.

CNS de tz portant sur χ . $u \in \mathcal{L}(E)$ (resp. $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$) est tz ssi son polynôme caractéristique est scindé.

Séries numériques

<u>Définition d'une série.</u> Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On appelle série de terme général u_n la suite $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ où $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$. La quantité S_n est appelée somme partielle d'indice n de la série de terme général u_n .

Convergence d'une série. On dit que la série de terme général u_n converge si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses sommes partielles possède une limite finie quand $n\to +\infty$. Dans ce cas, on définit la somme S et le reste R_n de la série par $S=\sum_{k=0}^{+\infty}u_k$ et $R_n=S-S_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}u_k$.

<u>Séries de référence</u>. La série de Riemann $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^{\alpha}}$ converge ssi $\alpha > 1$.

Lé série géométrique $\sum_{n \in \mathbb{N}} z^n$ converge ssi |z| < 1. Dans ce cas $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ et $R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} z^k = \frac{z^{n+1}}{1-z}$

La série exponentielle $\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{z^n}{n!}$ converge pour tout $z\in\mathbb{C}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}=\mathrm{e}^z$.

Caractérisation de la cv des sàtp. Une sàtp converge ssi la suite de ses sommes partielles est majorée.

Critère de comparaison des sàtp. Soient deux sàtp de termes généraux u_n et v_n vérifiant soit $u_n \le v_n$, soit $u_n = o(v_n)$, soit $u_n = O(v_n)$.

Dans ce cas, si $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ cv, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ cv; si $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ dv, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ dv.

<u>Critère d'équivalence des sàtp</u>. Soient deux sàtp de termes généraux u_n et v_n vérifiant $u_n \sim v_n$.

$$\overline{\text{Alors}: \sum_{n \in \mathbb{N}} u_n \text{ cv ssi } \sum_{n \in \mathbb{N}} v_n \text{ cv.}}$$

Programme détaillé

Liste des exigibles

- connaître la définition d'une valeur propre, d'un vecteur propre et d'un sous-espace propre;
- savoir déterminer les valeurs propres à l'aide du polynôme caractéristique;
- savoir déterminer la dimension d'un sous-espace propre.
- connaître la définition de la diagonalisabilité;
- savoir démontrer qu'une matrice est ou n'est pas diagonalisable;
- savoir diagonaliser ou trigonaliser une matrice dans des cas simples.

Chap 4: réduction

- I) Éléments propres d'une matrice et d'un endomorphisme
 - 1) Éléments propres d'une matrice
 - Définition d'une valeur propre.
 - Les propositions suivantes sont équivalentes :
 - i) λ est vp de A;
 - ii) $\operatorname{Ker}(A \lambda I_n) \neq \{0\}$;
 - iii) $\operatorname{rg}(A \lambda I_n) < n$;
 - iv) $A \lambda I_n \notin GL_n(\mathbb{K})$;
 - v) $\det(A \lambda I_n) = 0$.
 - Polynôme caractéristique : $\chi_A(t) = \det(tI_n A)$ de degré n et unitaire.
 - Les vp de A sont les racines de χ_A .
 - 0 est vp de *A* ssi *A* n'est pas inversible.
 - Si *A* est triangulaire, alors ses vp sont ses coefficients diagonaux.
 - Définition du spectre Sp(A) de A.

- Définition d'un vecteur propre, d'un sous-espace propre.
- Toute famille de \overrightarrow{vp} de A associés à des vp distinctes est libre.
- A possède au plus n vp distinctes.
- La somme des sep de A est directe.
- La somme des dimensions des sep de *A* est inférieur ou égal à *n*.
- Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique.
- Multiplicité d'une vp; inégalité $1 \leq \dim E_{\lambda} \leq m(\lambda)$.
- 2) Éléments propres d'un endomorphisme
- a) Généralités
- Définition des éléments propres.
- b) Cas de la dimension finie
- \bullet Spectre de u.
- Soient \mathcal{B} une base de E et $A = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$.
 - $-\lambda \in \operatorname{Sp}(u) \operatorname{ssi} \lambda \in \operatorname{Sp}(A);$
 - $-\overrightarrow{x} \in E_{\lambda}(u) \text{ ssi } X = \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(\overrightarrow{x}) \in E_{\lambda}(A).$

• Transposition aux endomorphismes des résultats vus pour les matrices.

II) Réduction

- 1) Diagonalisation des endomorphismes
- *u* est dz lorsqu'il existe une base de *E* dans laquelle sa matrice est diagonale.
- *u* est dz ssi il existe une base de *E* formée de \overrightarrow{vp} de *u*.
- *u* est dz ssi la somme des dimensions de ses sep est égale à dim*E* (pv admise).
- u est dz ssi χ_u est scindé et la multiplicité algébrique de chaque vp de u est égale à la dimension du sep associé (pv admise).
- Si u possède n vp distinctes deux à deux, alors u est dz et ses sep sont tous de dimension 1. C'est en particulier le cas si γ_u est srs.
- 2) Diagonalisation des matrices carrées
- A est dz si elle est semblable à une matrice diagonale.
- A est dz ssi l'endomorphisme canoniquement associé à A est dz.
- La trace et le déterminant d'une matrice dz sont respectivement la somme et le produit de ses vp comptées avec leurs multiplicités.

- A est dz ssi la somme des dimensions de ses sep est égale à n (pv admise).
- A est dz ssi χ_A est scindé et la multiplicité algébrique de chaque valeur propre de A est égale à la dimension du sep associé (pv admise).
- Si A possède n vp distinctes deux à deux, alors A est dz et ses sep sont tous de dimension 1. C'est en particulier le cas si χ_A est srs.
- Si *A* est triangulaire avec tous ses coefficients diagonaux deux à deux distincts, alors *A* est dz.
- 3) Trigonalisation
- *u* est dit tz lorsqu'il existe une base de *E* dans laquelle sa matrice est triangulaire.
- *u* est tz ssi son polynôme caractéristique est scindé. (pv admise)
- A est tz si elle est semblable à une matrice triangulaire.
- La trace et le déterminant d'une matrice tz sont respectivement la somme et le produit de ses vp comptées avec leurs multiplicités algébriques.
- Exemple de trigonalisation d'une matrice 2×2 .
- Exemple de trigonalisation d'une matrice 3×3 .
- 4) Applications
- Puissances d'une matrice dz.