Semaine 7 (18/11–22/11) : suites et séries numériques

Consignes. La colle débute par la restitution écrite d'énoncés mathématiques choisis par l'examinateur dans la liste fournie ci-après. Cette restitution n'excèdera pas 8 minutes sinon les énoncés manquants seront considérés comme non sus. Pour cette semaine :

— Un énoncé pioché dans « suites ».

— Liste des séries numériques de référence.

— Un autre énoncé pioché dans « séries ».

La colle se poursuivra par la résolution d'un ou plusieurs exercices fournis par l'examinateur dans le cadre des exigibles et du programme détaillé dans la suite.

Notation. La connaissance du cours détermine la fourchette dans laquelle sera évalué l'étudiant :

— 3 énoncés sus : note minimale de 9/20;

— 1 énoncé erroné ou non su : note maximale de 13/20;

— 2 énoncés erronés ou non sus : note maximale de 6/20;

Les colleurs sont libres d'utiliser toutes les notes allant de 0 à 20 dans le respect des contraintes ci-dessus.

Énoncés

Suites

ε-définition de la limite. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ (ou $\ell \in \mathbb{C}$) si :

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}, \quad \forall n \geqslant n_\varepsilon, \quad |u_n - \ell| < \varepsilon.$$

Suites bornées. Une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$) est dite bornée si : $\exists M \geqslant 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leqslant M$.

Théorème de limite monotone. Toute suite croissante et majorée (resp. décroissante et minorée) converge.

Suites adjacentes. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles adjacentes :

(i) la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante;

(ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$;

(iii) la suite $(v_n - u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

Alors $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent vers le même réel ℓ et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant \ell \leqslant v_n$.

Suites arithmétiques. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique s'il existe $r \in \mathbb{C}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$.
Dans ce cas, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 + nr$.
Par ailleurs, $\sum\limits_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Suites géométriques. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique s'il existe $q \in \mathbb{C}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = q u_n$.
Dans ce cas, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = u_0 \cdot q^n$.
Par ailleurs, si $q \neq 1$, $\sum\limits_{k=0}^{n} q^k = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Suites arithmético-géométriques. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite arithmético-géométrique s'il existe $r \in \mathbb{C}^*$ et $q \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = q u_n + r$.
Dans ce cas, il existe un unique $\omega \in \mathbb{C}$ tel que la suite $(u_n - \omega)$ soit géométrique de raison q et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \omega + (u_0 - \omega) \cdot q^n$.

Suites récurrente linéaire d'ordre 2. $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite récurrente linéaire d'ordre 2 s'il existe $(\alpha,\beta)\in\mathbb{K}^2$ vérifiant : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}=\alpha u_{n+1}+\beta u_n$.
Dans ce cas, en notant $P(X)=X^2-\alpha X-\beta$,

(i) si P possède deux racines distinctes λ_1 et λ_2, il existe $(\mu_1,\mu_2)\in\mathbb{K}^2$ vérifiant : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\mu_1\lambda_1^n+\mu_2\lambda_2^n$;

(ii) si P possède une racine double λ_0, il existe $(\mu_1,\mu_2)\in\mathbb{K}^2$ vérifiant : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=(\mu_1 n+\mu_2)\lambda_0^n$.

Dans le cas particulier où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est à valeurs réelles et P possède deux racines distinctes complexes conjuguées, $\lambda_1=\rho e^{\mathbf{i}\theta}=\overline{\lambda_2}$, il existe $(\mu_1,\mu_2)\in\mathbb{R}^2$ vérifiant : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n=\rho^n\big(\mu_1\cos(n\theta)+\mu_2\sin(n\theta)\big)$.

Séries

Définition d'une série. Soit $(u_n)\in\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. On appelle série $\sum_{n\in\mathbb{N}}u_n$ la suite de terme général $S_n=\sum_{k=0}^{n}u_k$. Ainsi, $\sum_{n\in\mathbb{N}}u_n=(S_0,S_1,S_2,\dots)$. La quantité S_n est la somme partielle d'indice n de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}u_n$.

Convergence d'une série. On dit que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}u_n$ converge si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de ses sommes partielles possède une limite finie quand $n\to+\infty$. Dans ce cas, on définit la somme S et le reste R_n de la série par $S=\sum_{k=0}^{+\infty}u_k$ et $R_n=S-S_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}u_k$.

Séries de référence. $\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{n^\alpha}$ cv ssi $\alpha>1$.

$\sum_{n\in\mathbb{N}}z^n$ cv ssi $|z|<1$; dans ce cas $\sum_{n=0}^{+\infty}z^n=\frac{1}{1-z}$;

$\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{z^n}{n!}$ cv pour tout $z\in\mathbb{C}$ et $\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}=e^z$.

Caractérisation de la cv des séries à termes positifs. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs positives.
Alors $\sum_{n\in\mathbb{N}}u_n$ cv ssi $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

Critère de majoration/minoration des satp. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant $0\leqslant u_n\leqslant v_n$ apcr.
Dans ce cas, si $\sum_{n\in\mathbb{N}}v_n$ cv, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}}u_n$ cv ; si $\sum_{n\in\mathbb{N}}u_n$ dv, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}}v_n$ dv.

Critère de négligeabilité/domination des satp. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs positives vérifiant $u_n=o(v_n)$ ou $u_n=O(v_n)$.
Alors : si $\sum_{n\in\mathbb{N}}v_n$ cv, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}}u_n$ cv ; si $\sum_{n\in\mathbb{N}}u_n$ dv, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}}v_n$ dv.

Critère d'équivalence des satp. Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs positives vérifiant $u_n\sim v_n$.
Alors : $\sum_{n\in\mathbb{N}}u_n$ cv ssi $\sum_{n\in\mathbb{N}}v_n$ cv.

Définition de la cva d'une série, sommabilité. $\sum_{n\in\mathbb{N}}u_n$ est dite absolument convergente ou $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dite sommable si $\sum_{n\in\mathbb{N}}|u_n|$ cv.

Cssa. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs positives ; décroissante ; convergeant vers 0.
Alors la série alternée $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^n u_n$ converge. De plus : $\forall n\in\mathbb{N},\ S_{2n+1}\leqslant S\leqslant S_{2n}$ et $|R_n|\leqslant u_{n+1}$.
De même, la série alternée $\sum_{n\in\mathbb{N}}(-1)^{n+1}u_n$ converge et : $\forall n\in\mathbb{N},\ S_{2n}\leqslant S\leqslant S_{2n+1}$ et $|R_n|\leqslant u_{n+1}$.

Règle de d'Alembert. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs non nulles vérifiant $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\xrightarrow[n\to+\infty]{}\ell\in[0,+\infty[\cup\{+\infty\}$.
Alors : si $\ell<1$, $\sum_{n\in\mathbb{N}}u_n$ cva ; si $\ell>1$, $\sum_{n\in\mathbb{N}}u_n$ dvg ; si $\ell=1$, on ne peut pas conclure.

Produit de Cauchy. Le produit de Cauchy des séries $\sum_{n\in\mathbb{N}}u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}}v_n$ est la série $\sum_{n\in\mathbb{N}}w_n$, où $w_n=\sum_{k=0}^{n}u_k v_{n-k}$.
Si les deux séries $\sum_{n\in\mathbb{N}}u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}}v_n$ cva alors $\sum_{n\in\mathbb{N}}w_n$ cva et $\sum_{n=0}^{+\infty}w_n=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}v_n\right)$.

Programme détaillé

- connaître le vocabulaire lié aux séries (terme général, somme partielle, somme, reste, convergence, absolue convergence);
- connaître les séries de référence;
- être capable d'étudier la nature d'une série à termes positifs via un critère de comparaison;
- être capable de mener une comparaison série-intégrale;
- savoir détecter une série alternée et appliquer le critère spécial ou la méthode d'éclatement;
- pouvoir appliquer la règle de d'Alembert;
- reconnaître un produit de Cauchy.

I) Notions de 1re année sur les suites numériques

II) Généralités sur les séries numériques

1) Définitions et premiers exemples

- on appelle série de terme général u_n et on note $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.
- On dit que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Dans ce cas, sa somme est $S = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} u_k$ et le reste d'indice n est $R_n = S - S_n = \sum\limits_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.
- Série géométrique de raison $z \in \mathbb{C}$: $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} z^n$ converge ssi $|z| < 1$. Dans ce cas $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

2) Premières propriétés

- Si $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge, nécessairement $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
- Divergence grossière d'une série.
- Séries téléscopiques : la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (u_{n+1} - u_n)$ cv ssi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cv.
- L'ensemble des suites dont la série converge forme un sev de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
- Si $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ cv et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ dv, alors $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (u_n + v_n)$ dv.

III) Séries numériques à termes positifs

1) Conditions nécessaires et suffisantes de convergence

- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive. La série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ cv ssi $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
- Technique de comparaison série/intégrale.
- Séries de Riemann.

2) Critères de comparaison

- Critère de majoration/minoration des séries à termes positifs.
- Critère d'équivalence des séries à termes positifs.
- Critère de négligeabilité des séries à termes positifs.
- Critère de domination des séries à termes positifs.

IV) Séries absolument convergentes

- On dit que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge absolument (cva) si la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ converge.
- Si $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ cva alors $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ cv et $\left|\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.
- Séries alternées et critère spécial.
- Règle de d'Alembert.
- Produit de Cauchy.
- Série exponentielle complexe.