## Semaine 8 (17/11-21/11): séries numériques

**Consignes** La colle débute par la restitution écrite d'un énoncé mathématique choisi par l'examinateur dans la liste fournie ci-après, et par l'étude de la nature d'une sàtp via un théorème de comparaison.

Tout ceci n'excèdera pas 10 minutes.

La colle se poursuivra par la résolution d'un ou plusieurs exercices fournis par l'examinateur dans le cadre des exigibles et du programme détaillé dans la suite.

Notation La connaissance du cours et l'étude déterminent la fourchette dans laquelle sera évalué l'étudiant :

- énoncé su et étude correcte : note minimale de 11/20;
- énoncé non su et étude incorrecte : note maximale de 7/20;
- autre situation : note comprise entre 8 et 14.

Les colleurs sont libres d'utiliser toutes les notes allant de 0 à 20 dans le respect des contraintes ci-dessus.

### Énoncés

#### Séries numériques

<u>Définition d'une série.</u> Soit  $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ . On appelle série de terme général  $u_n$  la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  où  $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ . La quantité  $S_n$  est appelée somme partielle d'indice n de la série de terme général  $u_n$ .

Convergence d'une série. On dit que la série de terme général  $u_n$  converge si la suite  $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$  de ses sommes partielles possède une limite finie quand  $n\to +\infty$ . Dans ce cas, on définit la somme S et le reste  $R_n$  de la série par  $S=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}u_k$  et  $R_n=S-S_n=\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}u_k$ .

<u>Séries de référence</u>. La série de Riemann  $\sum_{n \in \mathbb{N}^*} \frac{1}{n^{\alpha}}$  converge ssi  $\alpha > 1$ .

Lé série géométrique  $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}z^n$  converge ssi |z|<1. Dans ce cas  $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}z^n=\frac{1}{1-z}$  et  $R_n=\sum\limits_{k=n+1}^{+\infty}z^k=\frac{z^{n+1}}{1-z}$ 

La série exponentielle  $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}\frac{z^n}{n!}$  converge pour tout  $z\in\mathbb{C}$  et  $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}=\mathrm{e}^z$ .

Caractérisation de la cv des sàtp. Une sàtp converge ssi la suite de ses sommes partielles est majorée.

<u>Critère de comparaison des sàtp</u>. Soient deux sàtp de termes généraux  $u_n$  et  $v_n$  vérifiant soit  $u_n \le v_n$ , soit  $u_n = o(v_n)$ , soit  $u_n = O(v_n)$ .

Dans ce cas, si  $\sum_{n\in\mathbb{N}}v_n$  cv, alors  $\sum_{n\in\mathbb{N}}u_n$  cv; si  $\sum_{n\in\mathbb{N}}u_n$  dv, alors  $\sum_{n\in\mathbb{N}}v_n$  dv.

Critère d'équivalence des sàtp. Soient deux sàtp de termes généraux  $u_n$  et  $v_n$  vérifiant  $u_n \sim v_n$ .

Alors:  $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$  cv ssi  $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$  cv.

<u>Définition de la cva d'une série</u>. La série de terme général  $u_n$  est dite absolument convergente si la série de terme général  $|u_n|$  converge.

Si c'est le cas la série de terme général  $u_n$  est également convergente et vérifie  $\begin{vmatrix} +\infty \\ \sum_{n=0}^{+\infty} u_n \end{vmatrix} \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ .

Cssa. Soit  $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$  une suite à valeurs positives; décroissante; convergeant vers 0.

Alors la série alternée  $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n u_n$  converge. De plus :  $\forall n\in\mathbb{N}, S_{2n+1}\leqslant S\leqslant S_{2n}$  et  $|R_n|\leqslant u_{n+1}$ .

De même, la série alternée  $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^{n+1}u_n$  converge et :  $\forall n\in\mathbb{N}, S_{2n}\leqslant S\leqslant S_{2n+1}$  et  $|R_n|\leqslant u_{n+1}$ .

Règle de d'Alembert. Soit une suite  $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$  à valeurs non nulles vérifiant  $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in [0,+\infty[\cup\{+\infty\}.$  Alors : si  $\ell < 1$ ,  $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$  cva; si  $\ell > 1$ ,  $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$  dvg; si  $\ell = 1$ , on ne peut pas conclure.

Produit de Cauchy. Le produit de Cauchy des séries  $\sum_{n\in\mathbb{N}}u_n$  et  $\sum_{n\in\mathbb{N}}v_n$  est la série  $\sum_{n\in\mathbb{N}}w_n$ , où  $w_n=\sum_{k=0}^nu_kv_{n-k}$ . Si les deux séries  $\sum_{n\in\mathbb{N}}u_n$  et  $\sum_{n\in\mathbb{N}}v_n$  cva alors  $\sum_{n\in\mathbb{N}}w_n$  cva et  $\sum_{n=0}^{+\infty}w_n=\left(\sum_{n=0}^{+\infty}u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}v_n\right)$ .

# Programme détaillé

#### Liste des exigibles

- connaître le vocabulaire lié aux séries (terme général, somme partielle, somme, reste, convergence, absolue convergence);
- être capable de mener une comparaison série-intégrale;
- connaître les séries de référence;
- être capable d'étudier la nature d'une série à termes positifs via un critère de comparaison;
- savoir détecter une série alternée et appliquer le critère spécial ou la méthode d'éclatement;
- pouvoir appliquer la règle de d'Alembert;
- reconnaître un produit de Cauchy.
- I) Notions de 1re année sur les suites numériques
- II) Généralités sur les séries numériques
  - 1) Définitions et premiers exemples
  - on appelle série de terme général  $u_n$  et on note  $\sum_{n\in\mathbb{N}}u_n$  la suite  $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$  définie par  $S_n=\sum_{k=0}^nu_k$ .
  - On dit que la série  $\sum_{n \in \mathbb{N}} u_n$  converge si la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge. Dans ce cas, sa somme est  $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$  et le reste d'indice n est  $R_n = S S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ .
  - Série géométrique de raison  $z \in \mathbb{C}$ :  $\sum_{n \in \mathbb{N}} z^n$  converge ssi |z| < 1. Dans ce cas  $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ .
  - 2) Premières propriétés
  - Si  $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$  converge, nécessairement  $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$  converge vers 0.
  - Divergence grossière d'une série.

- Séries téléscopiques : la série  $\sum_{n\in\mathbb{N}}(u_{n+1}-u_n)$  cv ssi  $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$  cv.
- L'ensemble des suites dont la série converge forme un sev de  $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ .
- Si  $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$  cv et  $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$  dv, alors  $\sum_{n\in\mathbb{N}} (u_n + v_n)$  dv.
- III) Séries numériques à termes positifs
  - 1) Conditions nécessaires et suffisantes de convergence
  - Soit  $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$  une suite positive. La série  $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$  cv ssi  $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$  est majorée.
  - Technique de comparaison série/intégrale.
  - Séries de Riemann.
  - 2) Critères de comparaison
  - Critère de majoration/minoration des séries à termes positifs.
  - Critère d'équivalence des séries à termes positifs.
  - Critère de négligeabilité des séries à termes positifs.

- Critère de domination des séries à termes positifs.
- IV) Séries absolument convergentes
  - On dit que la série  $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}u_n$  converge absolument (cva) si la série  $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}|u_n|$  converge.
- Si  $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$  cva alors  $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$  cv et  $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$ .
- Séries alternées et critère spécial.
- Règle de d'Alembert.
- Produit de Cauchy.
- Série exponentielle complexe.