Semaine 9 (24/11–28/11) : séries numériques

Consignes La colle débute par la restitution écrite d'un énoncé mathématique choisi par l'examinateur dans la liste fournie ci-après, et par la démonstration du fait qu'un des « produits scalaires à connaître » est bien un produit scalaire.

Tout ceci n'excèdera pas 10 minutes.

La colle se poursuivra par la résolution d'un ou plusieurs exercices fournis par l'examinateur dans le cadre des exigibles et du programme détaillé dans la suite.

Notation La connaissance du cours et l'étude déterminent la fourchette dans laquelle sera évalué l'étudiant :

— énoncé su et démonstration correcte : note minimale de 11/20 ;

— énoncé non su et démonstration incorrecte : note maximale de 7/20 ;

— autre situation : note comprise entre 8 et 14.

Les colleurs sont libres d'utiliser toutes les notes allant de 0 à 20 dans le respect des contraintes ci-dessus.

Énoncés

Séries numériques

Définition de la cva d'une série. La série de terme général u_n est dite absolument convergente si la série de terme général $|u_n|$ converge.
Si c'est le cas la série de terme général u_n est également convergente et vérifie $\left|\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.

Cssa. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite à valeurs positives ; décroissante ; convergeant vers 0.
Alors la série alternée $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n u_n$ converge. De plus : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_{2n+1} \leqslant S \leqslant S_{2n}$ et $|R_n| \leqslant u_{n+1}$.
De même, la série alternée $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (-1)^{n+1} u_n$ converge et : $\forall n \in \mathbb{N}$, $S_{2n} \leqslant S \leqslant S_{2n+1}$ et $|R_n| \leqslant u_{n+1}$.

Règle de d'Alembert. Soit une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs non nulles vérifiant $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in [0,+\infty[\cup\{+\infty\}$.
Alors : si $\ell < 1$, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ cva ; si $\ell > 1$, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ dvg ; si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

Produit de Cauchy. Le produit de Cauchy des séries $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ est la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} w_n$, où $w_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}$.
Si les deux séries $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ cva alors $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} w_n$ cva et $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty} v_n\right)$.

Produit scalaire, norme, inégalités

Définition d'un produit scalaire. On appelle produit scalaire sur E toute forme bilinéaire φ symétrique définie positive sur E :

— φ est définie sur $E \times E$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$;

— $\forall \vec{y} \in E$, $\varphi(\cdot, \vec{y}) : \vec{x} \mapsto \varphi(\vec{x}, \vec{y})$ est linéaire (linéarité à gauche) ;

— $\forall \vec{y} \in E$, $\varphi(\vec{y}, \cdot) : \vec{x} \mapsto \varphi(\vec{y}, \vec{x})$ est linéaire (linéarité à droite) ;

— $\forall (\vec{x}, \vec{y}) \in E^2$, $\varphi(\vec{x}, \vec{y}) = \varphi(\vec{y}, \vec{x})$ (symétrie) ;

- $\forall \overrightarrow{x} \in E, \varphi(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) \geqslant 0$ (positivité) ;
- $\forall \overrightarrow{x} \in E, \varphi(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0_E}$ (caractère défini).

Produits scalaires à connaître.

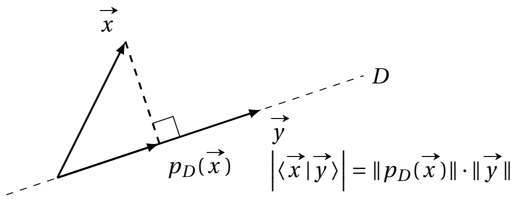
- Sur $\mathbb{R}^n$: $\langle \overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.
- Sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: $\langle X|Y \rangle = X^\top Y = \sum_{i=1}^{n} [X]_i [Y]_i$.
- Sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: $\langle A|B \rangle = \operatorname{tr}\left(A^\top B\right) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} [A]_{ij} [B]_{ij}$.
- Sur $\mathbb{R}[X]$: $\langle P|Q \rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} [P]_k [Q]_k$.
- Sur $\mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$: $\langle f|g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)\mathrm{d}t$.

Norme préhilbertienne. $\forall \overrightarrow{x} \in E, \|\overrightarrow{x}\| = \sqrt{\langle \overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{x} \rangle}$.

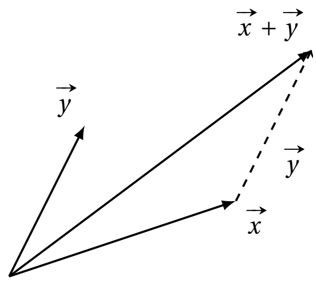
Identités remarquables. Pour tout $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in E^2$,
$\|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\|^2 = \|\overrightarrow{x}\|^2 + \|\overrightarrow{y}\|^2 + 2\langle \overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{y} \rangle$,
$\|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\|^2 = \|\overrightarrow{x}\|^2 + \|\overrightarrow{y}\|^2 - 2\langle \overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{y} \rangle$,
$\langle \overrightarrow{x} - \overrightarrow{y} \mid \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} \rangle = \|\overrightarrow{x}\|^2 - \|\overrightarrow{y}\|^2$.

Identités de polarisation. $\forall (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in E^2$,
$\langle \overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{y} \rangle = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\|^2 - \|\overrightarrow{x}\|^2 - \|\overrightarrow{y}\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\|\overrightarrow{x}\|^2 + \|\overrightarrow{y}\|^2 - \|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\|^2 - \|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\|^2\right)$.

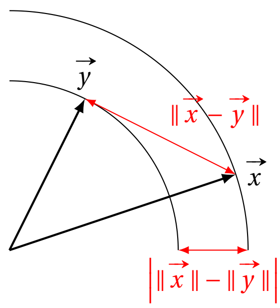
Inégalité de Cauchy-Schwarz. $\forall (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in E^2, |\langle \overrightarrow{x} \mid \overrightarrow{y} \rangle| \leqslant \|\overrightarrow{x}\| \cdot \|\overrightarrow{y}\|$ avec égalité ssi $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ sont colinéaires.



Inégalité triangulaire. $\forall (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in E^2, \|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\| \leqslant \|\overrightarrow{x}\| + \|\overrightarrow{y}\|$ avec égalité ssi $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ sont positivement liés.



Inégalité triangulaire renversée. $\forall (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in E^2, \left|\|\overrightarrow{x}\| - \|\overrightarrow{y}\|\right| \leqslant \|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\|$.



Programme détaillé

Liste des exigibles

— connaître le vocabulaire lié aux séries (terme général, somme partielle, somme, reste, convergence, absolue convergence) ;
— être capable de mener une comparaison série-intégrale ;
— connaître les séries de référence ;
— être capable d'étudier la nature d'une série à termes positifs via un critère de comparaison ;
— savoir détecter une série alternée et appliquer le critère spécial ou la méthode d'éclatement ;
— pouvoir appliquer la règle de d'Alembert ;
— reconnaître un produit de Cauchy.

I) Notions de 1re année sur les suites numériques

II) Généralités sur les séries numériques

1) Définitions et premiers exemples

- on appelle série de terme général u_n et on note $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.
- On dit que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Dans ce cas, sa somme est $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ et le reste d'indice n est $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.
- Série géométrique de raison $z \in \mathbb{C}$: $\sum_{n\in\mathbb{N}} z^n$ converge ssi $|z| < 1$. Dans ce cas $\sum_{n=0}^{+\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$.

2) Premières propriétés

- Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge, nécessairement $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
- Divergence grossière d'une série.
- Séries téléscopiques : la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (u_{n+1} - u_n)$ cv ssi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ cv.
- L'ensemble des suites dont la série converge forme un sev de $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
- Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ cv et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ dv, alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} (u_n + v_n)$ dv.

III) Séries numériques à termes positifs

1) Conditions nécessaires et suffisantes de convergence

- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite positive. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ cv ssi $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.
- Technique de comparaison série/intégrale.
- Séries de Riemann.

2) Critères de comparaison

- Critère de majoration/minoration des séries à termes positifs.
- Critère d'équivalence des séries à termes positifs.
- Critère de négligeabilité des séries à termes positifs.
- Critère de domination des séries à termes positifs.

IV) Séries absolument convergentes

- On dit que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge absolument (cva) si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ converge.
- Si $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ cva alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ cv et $\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|$.
- Séries alternées et critère spécial.
- Règle de d'Alembert.
- Produit de Cauchy.
- Série exponentielle complexe.