Semaine 10 (01/12–05/12) : espaces préhilbertiens

Consignes La colle débute par la restitution écrite d'un énoncé mathématique choisi par l'examinateur dans la liste fournie ci-après, et par la démonstration du fait qu'un des « produits scalaires à connaître » est bien un produit scalaire.

Tout ceci n'excèdera pas 10 minutes.

La colle se poursuivra par la résolution d'un ou plusieurs exercices fournis par l'examinateur dans le cadre des exigibles et du programme détaillé dans la suite.

Notation La connaissance du cours et l'étude déterminent la fourchette dans laquelle sera évalué l'étudiant :

— énoncé su et démonstration correcte : note minimale de 11/20 ;

— énoncé non su et démonstration incorrecte : note maximale de 7/20 ;

— autre situation : note comprise entre 8 et 14.

Les colleurs sont libres d'utiliser toutes les notes allant de 0 à 20 dans le respect des contraintes ci-dessus.

Énoncés

Produit scalaire, norme, inégalités

Définition d'un produit scalaire. On appelle produit scalaire sur E toute forme bilinéaire φ symétrique définie positive sur E :

— φ est définie sur $E \times E$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$;

— $\forall \overrightarrow{y} \in E$, $\varphi(\cdot, \overrightarrow{y}) : \overrightarrow{x} \longmapsto \varphi(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y})$ est linéaire (linéarité à gauche) ;

— $\forall \overrightarrow{y} \in E$, $\varphi(\overrightarrow{y}, \cdot) : \overrightarrow{x} \longmapsto \varphi(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{x})$ est linéaire (linéarité à droite) ;

— $\forall (\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in E^2$, $\varphi(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \varphi(\overrightarrow{y}, \overrightarrow{x})$ (symétrie) ;

— $\forall \overrightarrow{x} \in E$, $\varphi(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) \geqslant 0$ (positivité) ;

— $\forall \overrightarrow{x} \in E$, $\varphi(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{x}) = 0 \Longrightarrow \overrightarrow{x} = \overrightarrow{0_E}$ (caractère défini).

Produits scalaires à connaître.

— Sur $\mathbb{R}^n$: $\langle \overrightarrow{x} | \overrightarrow{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$.

— Sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: $\langle X | Y \rangle = X^\mathsf{T} Y = \sum_{i=1}^{n} [X]_i [Y]_i$.

— Sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: $\langle A | B \rangle = \operatorname{tr}\left(A^\mathsf{T} B\right) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} [A]_{ij} [B]_{ij}$.

— Sur $\mathbb{R}[X]$: $\langle P | Q \rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} [P]_k [Q]_k$.

— Sur $\mathscr{C}([a,b], \mathbb{R})$: $\langle f | g \rangle = \int_a^b f(t) g(t) \mathrm{d}t$.

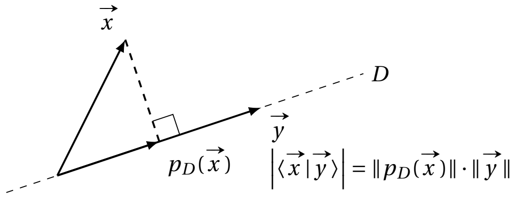
Norme préhilbertienne. $\forall \overrightarrow{x} \in E$, $\| \overrightarrow{x} \| = \sqrt{\langle \overrightarrow{x} | \overrightarrow{x} \rangle}$.

Identités remarquables. Pour tout $(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) \in E^2$,
$\| \overrightarrow{x} + \overrightarrow{y} \|^2 = \| \overrightarrow{x} \|^2 + \| \overrightarrow{y} \|^2 + 2 \langle \overrightarrow{x} | \overrightarrow{y} \rangle$,

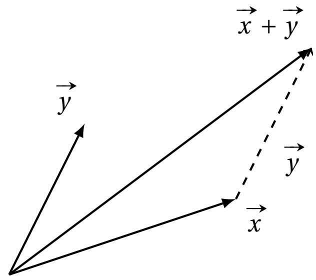
$\|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - 2\langle \vec{x} \,|\, \vec{y}\rangle$,
$\langle \vec{x}-\vec{y} \,|\, \vec{x}+\vec{y}\rangle = \|\vec{x}\|^2 - \|\vec{y}\|^2$.

Identités de polarisation. $\forall (\vec{x},\vec{y}) \in E^2$,
$\langle \vec{x} \,|\, \vec{y}\rangle = \frac{1}{2}\left(\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 - \|\vec{x}\|^2 - \|\vec{y}\|^2\right) = \frac{1}{2}\left(\|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2 - \|\vec{x}-\vec{y}\|^2\right) = \frac{1}{4}\left(\|\vec{x}+\vec{y}\|^2 - \|\vec{x}-\vec{y}\|^2\right)$.

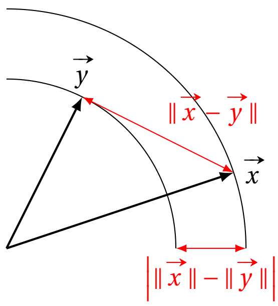
Inégalité de Cauchy-Schwarz. $\forall (\vec{x},\vec{y}) \in E^2$, $|\langle \vec{x} \,|\, \vec{y}\rangle| \leqslant \|\vec{x}\| \cdot \|\vec{y}\|$ avec égalité ssi $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont colinéaires.



Inégalité triangulaire. $\forall (\vec{x},\vec{y}) \in E^2$, $\|\vec{x}+\vec{y}\| \leqslant \|\vec{x}\| + \|\vec{y}\|$ avec égalité ssi $\vec{x}$ et $\vec{y}$ sont positivement liés.



Inégalité triangulaire renversée. $\forall (\vec{x},\vec{y}) \in E^2$, $\left|\|\vec{x}\| - \|\vec{y}\|\right| \leqslant \|\vec{x}-\vec{y}\|$.



Orthogonalité

Théorème de Pythagore pour deux vecteurs $\forall (\vec{x},\vec{y}) \in E^2$, $\vec{x} \perp \vec{y} \Longleftrightarrow \|\vec{x}+\vec{y}\|^2 = \|\vec{x}\|^2 + \|\vec{y}\|^2$.

Famille orthogonale. Une famille $(\vec{x_i})_{i\in I}$ de vecteurs est dite orthogonale si : $\forall (i,j) \in I^2$, $i \neq j \Rightarrow \langle \vec{x_i} \,|\, \vec{x_j}\rangle = 0$.

Famille orthornormée. Une famille $(\vec{x_i})_{i\in I}$ de vecteurs est dite orthornormée si elle est orthogonale et si tous ses vecteurs sont unitaires : $\forall (i,j) \in I^2, \langle \vec{x_i} \,|\, \vec{x_j}\rangle = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}$.

Théorème de Pythagore généralisé. Pour toute famille finie orthogonale $(\vec{x_i})_{i\in I}$, il vient $\left\|\sum_{i\in I} \vec{x_i}\right\|^2 = \sum_{i\in I} \|\vec{x_i}\|^2$. La réciproque est fausse dès que $n \geqslant 3$.

Coordonnées dans une BON. Soit F un sev de E muni d'une BON $(\vec{e_1},\dots,\vec{e_n})$. Alors, $\forall \vec{x} \in F$, $\vec{x} = \sum_{k=1}^{n} \langle \vec{x} \,|\, \vec{e_k}\rangle \vec{e_k}$.

Projeté orthogonal sur une droite. Si D est la droite dirigée par $\vec{u}$, alors : $\forall \vec{x} \in E$, $p_D(\vec{x}) = \frac{\langle \vec{x} \,|\, \vec{u}\rangle}{\langle \vec{u} \,|\, \vec{u}\rangle} \vec{u}$.

Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt. Soit $(\vec{u_1},\dots,\vec{u_n})$ une famille libre de vecteurs de E.
En posant $\vec{u'_1} = \vec{u_1}$ puis $\forall k \in [\![1, n-1]\!]$, $\overrightarrow{u'_{k+1}} = \overrightarrow{u_{k+1}} - \sum_{j=1}^{k} \frac{\langle \overrightarrow{u_{k+1}} \,|\, \vec{u'_j}\rangle}{\langle \vec{u'_j} \,|\, \vec{u'_j}\rangle} \vec{u'_j}$, on construit une famille libre orthogonale $(\vec{u'_1},\dots,\vec{u'_n})$ vérifiant : $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\mathrm{Vect}(\vec{u'_1},\dots,\vec{u'_k}) = \mathrm{Vect}(\vec{u_1},\dots,\vec{u_k})$.

Orthogonal d'un sev.

— $F^{\perp} := \left\{\overrightarrow{y} \in E : \forall \overrightarrow{x} \in F, \langle \overrightarrow{y} | \overrightarrow{x} \rangle = 0\right\}$.

— Si $(\overrightarrow{u_i})_{i\in I}$ est une base de F, $\overrightarrow{x} \in F^{\perp}$ ssi $\forall i \in I, \langle \overrightarrow{x} | \overrightarrow{u_i} \rangle = 0$.

— Si $\dim F < +\infty$, $F^{\perp}$ est l'unique supplémentaire orthogonal de F et il vérifie $(F^{\perp})^{\perp} = F$.

Projeté orthogonal sur un sev de dim finie. Soit F un sev de dim finie de E.

— On définit le projecteur orthogonal p_F sur F comme le projecteur sur F parallèlement à $F^{\perp}$.

— Si $(\overrightarrow{e_1}, \ldots, \overrightarrow{e_q})$ est une BON de F, $\forall \overrightarrow{x} \in E$, $p_F(\overrightarrow{x}) = \sum_{k=1}^{q} \langle \overrightarrow{x} | \overrightarrow{e_k} \rangle \overrightarrow{e_k}$.

Distance à un sev de dim finie. Soit F un sev de dim finie de E et soit $\overrightarrow{x} \in E$. Alors il existe un unique élément $\overrightarrow{x_F} \in F$ vérifiant $d(\overrightarrow{x}, F) = \inf\left\{\|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\| : \overrightarrow{y} \in F\right\} = \|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{x_F}\|$, et cet élément est $\overrightarrow{x_F} = p_F(\overrightarrow{x})$.

Programme détaillé

Liste des exigibles

— connaître la définition d'un produit scalaire et les exemples fondamentaux;

— connaître la définition de la norme associée à un produit scalaire et les identités de polarisation;

— pouvoir s'appuyer sur des situations géométriques en dimension 2 et 3 pour comprendre la notion de vecteurs orthogonaux;

— maîtriser le projeté orthogonal sur une droite vectorielle;

— connaître et exploiter le théorème de Pythagore;

— connaître et exploiter l'inégalité de Cauchy-Schwarz;

— connaître la définition de famille orthogonale ou orthonormée;

— pouvoir orthogonaliser une famille de vecteurs via Gram-Schmidt;

— maîtriser la notion d'orthogonal d'un sev et la projection orthogonale sur un sev de dimension finie.

I) Produit scalaire et norme associée

1) Produit scalaire et exemples

- On appelle produit scalaire sur E toute forme bilinéaire symétrique définie positive.
- On appelle espace préhilbertien tout $\mathbb{R}$-ev muni d'un produit scalaire.
- On appelle espace euclidien tout espace préhilbertien de dimension finie.
- Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$: $\langle \overrightarrow{x} | \vec{y} \rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$.
- Produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$: $\langle X | Y \rangle = \sum_{k=1}^{n} [X]_k [Y]_k = X^{\top} Y$.
- $\langle f | g \rangle = \int_a^b f(t) g(t) \mathrm{d}t$ est un produit scalaire sur $\mathscr{C}([a,b], \mathbb{R})$.
- Produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}[X]$: $\langle P | Q \rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} [P]_k [Q]_k$.
- Produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$: $\langle A | B \rangle = \operatorname{tr}\left(A^{\top} B\right) = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} [A]_{ij} [B]_{ij}$.

2) Vecteurs orthogonaux et norme associée à un produit scalaire

- On dit que deux vecteurs $\overrightarrow{x}$ et $\overrightarrow{y}$ de E sont orthogonaux si $\langle \overrightarrow{x} | \overrightarrow{y} \rangle = 0$.
- $\|\overrightarrow{x}\| = \sqrt{\langle \overrightarrow{x} | \overrightarrow{x} \rangle}$ et $d(\overrightarrow{x}, \overrightarrow{y}) = \|\overrightarrow{x} - \overrightarrow{y}\|$.
- Propriétés de la norme $\|\cdot\|$.
- Identités de polarisation.
- Théorème de Pythagore pour deux vecteurs : $\overrightarrow{x} \perp \overrightarrow{y} \iff \|\overrightarrow{x} + \overrightarrow{y}\|^2 = \|\overrightarrow{x}\|^2 + \|\overrightarrow{y}\|^2$.
- Projection orthogonale sur la droite $D = \operatorname{Vect}(\overrightarrow{x})$: $p_D(\overrightarrow{y}) = \frac{\langle \overrightarrow{y} | \overrightarrow{x} \rangle}{\langle \overrightarrow{x} | \overrightarrow{x} \rangle} \overrightarrow{x}$.
- Inégalité de Cauchy-Schwarz.
- Inégalité triangulaire et inégalité triangulaire renversée.

II) Orthogonalité

1) Familles orthogonales et orthonormées

- $(\overrightarrow{x_i})_{i\in I}$ est orthogonale si : $\forall (i,j)\in I^2, i\neq j \Longrightarrow \langle \overrightarrow{x_i} | \overrightarrow{x_j}\rangle = 0$;
- $(\overrightarrow{x_i})_{i\in I}$ est orthonormée si : $\forall (i,j)\in I^2, \langle \overrightarrow{x_i} | \overrightarrow{x_j}\rangle = \delta_{i,j}$;
- Le vecteur nul $\overrightarrow{0_E}$ est le seul vecteur orthogonal à tous les vecteurs de E.
- Pour toute famille finie orthogonale $(\overrightarrow{x_i})_{i\in I}$, $\left\|\sum_{i\in I}\overrightarrow{x_i}\right\|^2 = \sum_{i\in I}\|\overrightarrow{x_i}\|^2$. En particulier, toute famille finie orthogonale de vecteurs tous non nuls est libre.
- Soit $(\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_n})$ une base orthonormée d'un sev F de E. Alors $\forall \overrightarrow{x}\in F$, $\overrightarrow{x} = \sum_{k=1}^n \langle \overrightarrow{x} | \overrightarrow{e_k}\rangle \overrightarrow{e_k}$. De plus, $\langle \overrightarrow{x} | \overrightarrow{y}\rangle = \sum_{k=1}^n \langle \overrightarrow{x} | \overrightarrow{e_k}\rangle\langle \overrightarrow{y} | \overrightarrow{e_k}\rangle$.
- Procédé d'orthogonalisation de Gram-Schmidt.
- Tout espace euclidien non réduit à zéro possède une base orthonormée.
- Toute famille orthonormée d'un espace euclidien peut être complétée en une base orthonormée.

2) Projection orthogonale sur un espace de dimension finie

- On dit que deux sous-ensembles A et B de E sont orthogonaux si : $\forall(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y})\in A\times B, \langle \overrightarrow{x} | \overrightarrow{y}\rangle = 0$.
- $F^\perp = \{\overrightarrow{x}\in E : \forall \overrightarrow{y}\in F, \langle \overrightarrow{x} | \overrightarrow{y}\rangle = 0\}$.
- Propriétés de l'orthogonal :
  (i) $F\subset G \Longrightarrow G^\perp\subset F^\perp$;
  (ii) $F^\perp$ est un sev de E orthogonal à F ;
  (iii) F et $F^\perp$ sont en somme directe ;
  (iv) $F\subset (F^\perp)^\perp$.
- Si $(\overrightarrow{x_i})_{i\in I}$ forme une base de F alors : $\overrightarrow{y}\in F^\perp \Longleftrightarrow \forall i\in I, \langle \overrightarrow{y} | \overrightarrow{x_i}\rangle = 0$.
- Soit F un sev de dim finie de E. Alors $F^\perp$ est l'unique supplémentaire orthogonal de F et $(F^\perp)^\perp = F$.
- Dans un espace euclidien E, on a toujours $F\oplus F^\perp = E$ et $\dim(F^\perp) = \dim(E)-\dim(F)$.
- Projection orthogonale sur un sev de dimension finie.
- Si $(\overrightarrow{e_1},\dots,\overrightarrow{e_q})$ est une BON de F, il vient : $\forall \overrightarrow{x}\in E, p_F(\overrightarrow{x}) = \sum_{k=1}^q \langle \overrightarrow{x} | \overrightarrow{e_k}\rangle \overrightarrow{e_k}$.
- Si $(\overrightarrow{u_1},\dots,\overrightarrow{u_q})$ est une BO de F, il vient : $\forall \overrightarrow{x}\in E, p_F(\overrightarrow{x}) = \sum_{k=1}^q \frac{\langle \overrightarrow{x} | \overrightarrow{u_k}\rangle}{\langle \overrightarrow{u_k} | \overrightarrow{u_k}\rangle}\overrightarrow{u_k}$.
- Soit F un sev de dim finie de E et soit $\overrightarrow{x}\in E$. Alors il existe un unique élément $\overrightarrow{x_F}\in F$ vérifiant $d(\overrightarrow{x},F) = \|\overrightarrow{x}-\overrightarrow{x_F}\|$ et cet élément est $\overrightarrow{x_F} = p_F(\overrightarrow{x})$.