Semaine 12 (05/01–09/01) : séries entières

Consignes La colle débute par la restitution écrite d'un énoncé mathématique choisi par l'examinateur dans la liste fournie ci-après, l'écriture d'un DSE usuel (toujours au choix de l'examinateur) et par la détermination du rayon de convergence d'une série entière.

Tout ceci n'excèdera pas 10 minutes.

La colle se poursuivra par la résolution d'un ou plusieurs exercices fournis par l'examinateur dans le cadre des exigibles et du programme détaillé dans la suite.

Notation La connaissance du cours et l'étude déterminent la fourchette dans laquelle sera évalué l'étudiant :

— énoncé su, DSE et démonstration corrects : note minimale de 11/20;

— énoncé non su, DSE erroné et démonstration incorrecte : note maximale de 7/20;

— autre situation : note comprise entre 8 et 14.

Les colleurs sont libres d'utiliser toutes les notes allant de 0 à 20 dans le respect des contraintes ci-dessus.

Énoncés

Rayon de convergence

Lemme d'Abel. Si la suite $(a_n z_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée pour un certain $z_0 \in \mathbb{C}$ non nul, alors la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ cva pour tout $|z| < |z_0|$.

Définitions et caractérisations du rayon de convergence.
Le rayon de cv R de la série entière $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ est $R = \sup\{r \in \mathbb{R}_+ : (a_n r^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ bornée}\}$.

De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}$,

— $|z| < R \Longrightarrow \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ cv absolument;

— $|z| > R \Longrightarrow \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ dv grossièrement.

Conséquence sur R de la cv ou de la dv en un point. Notons $R = R\left(\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n\right)$. Soit $z_0 \in \mathbb{C}$.

— Si la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z_0^n$ converge alors $R \geqslant |z_0|$.

— Si la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z_0^n$ diverge alors $R \leqslant |z_0|$.

Rayon de convergence et relations de comparaisons. Notons $R_a = R\left(\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n\right)$ et $R_b = R\left(\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n\right)$.

— Si $|a_n| \leqslant |b_n|$ ou $|a_n| = o(|b_n|)$ ou $|a_n| = O(|b_n|)$, alors $R_a \geqslant R_b$.

— Si $|a_n| \sim |b_n|$, alors $R_a = R_b$.

Multiplication ou division des coefficients par n. $R\left(\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n\right) = R\left(\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} n a_n z^n\right) = R\left(\sum\limits_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{a_n}{n} z^n\right)$.

Rayon d'une somme. Notons $R_a = R\left(\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n\right)$, $R_b = R\left(\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n\right)$ et $R_{a+b} = R\left(\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} (a_n + b_n) z^n\right)$.

— Si $R_a < R_b$, alors $R_{a+b} = R_a$.

— Si $R_a = R_b = R$, alors $R_{a+b} \geqslant R$.

Produit de Cauchy. Le produit de Cauchy des séries entières $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n z^n$ est la série entière $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n z^n$ où $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. Son rayon de convergence R_c vérifie $R_c \geqslant R$, où $R = \min(R_a, R_b)$.

Maintenant, pour tout $|z| < R$, $\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right)$.

Série entière de la variation réelle

Théorème d'Abel radial. La fonction somme d'une série entière est continue sur son intervalle de définition.

Intégration terme à terme. Notons $R = R\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n\right)$. Alors la fonction somme d'une série entière s' intègre terme à terme sur l'intervalle ouvert de cv :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(\int_0^x t^n \mathrm{d}t\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Dérivation terme à terme. La fonction somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R, R[$. De plus

$$\forall x \in]-R, R[, \quad \forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} x^n = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n x^{n-k}.$$

Série de Taylor. Si une fonction f est DSE sur $]-r, r[$ alors f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r, r[$ et

$$\forall x \in]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Formule de Taylor reste intégral en 0. Soit $r > 0$ et soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $]-r, r[$. Alors,

$$\forall x \in]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \mathrm{d}t.$$

DSE usuels.

$\forall x \in]-1, 1[$	
$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$	$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$
$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$	$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$
$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$	$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$
$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$\frac{1}{2}\ln(1-x^2) = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n}$
$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$	
$\mathrm{Arctan}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	

$\forall x \in \mathbb{R}$	
$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$	$\mathrm{e}^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$
$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
$\mathrm{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$\mathrm{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

Programme détaillé

Liste des exigibles

— savoir déterminer le rayon de convergence d'une série entière ;

— connaître les propriétés de la somme d'une série entière réelle (continuité sur le domaine de définition, dérivation et intégration terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence) ;

— connaître et savoir obtenir le DSE de fonctions usuelles.

— Savoir déterminer les solutions DSE d'une équation différentielle.

I) Définitions et premiers exemples

1) Définition d'une série entière

- On appelle série entière toute série de la forme $\sum a_n z^n$ où $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
- Exemples : série géométrique ; série exponentielle, polynôme en z.

2) Rayon de convergence

- Lemme d'Abel : si $(a_n z_0^n)$ est bornée, alors $\sum a_n z^n$ CVA pour tout $|z| < |z_0|$.
- On définit le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ par $R = \sup\{r \geqslant 0 : (a_n r^n) \text{ bornée}\} \in [0, +\infty]$.
- Si $|z| < R$, la série $\sum a_n z^n$ CVA ; si $|z| > R$, la série $\sum a_n z^n$ DVG.
- Disque ouvert de convergence $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$; intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$.

3) Détermination pratique du rayon de convergence

- $R = \sup\{r \geqslant 0 : (a_n r^n) \text{ converge vers } 0\}$.
- $R = \sup\left\{r \geqslant 0 : \sum a_n r^n \text{ converge}\right\}$.
- Si $\sum a_n z_0^n$ CV alors $R \geqslant |z_0|$; si $\sum a_n z_0^n$ DV alors $R \leqslant |z_0|$.
- Si $|a_n| \leqslant |b_n|$ ou $a_n = o(b_n)$ ou $a_n = O(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$.
- Si $a_n \sim b_n$ alors $R_a = R_b$.
- $\sum a_n z^n$, $\sum n a_n z^n$ et $\sum \frac{a_n}{n} z^n$ ont le même rayon de convergence.
- Rayon d'une somme : $R_{a+b} = \min(R_a, R_b)$ si $R_a \neq R_b$, et $R_{a+b} \geqslant R_a$ si $R_a = R_b$.
- Produit de Cauchy de deux séries entières.

II) Série entière de la variable réelle

1) Propriétés de la somme d'une série entière de la variable réelle (admises)

- On appelle somme de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
- La fonction somme d'une série entière est continue sur son domaine de définition.
- Intégration terme à terme. Une primitive de la fonction somme sur $]-R, R[$ s'obtient en intégrant terme à terme la série entière :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

- Dérivation terme à terme. La fonction somme est dérivable sur $]-R, R[$. De plus sa dérivée s'obtient en dérivant terme à terme la série entière :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

2) Fonctions développables en séries entières

- On dit que f est développable en série entière s'il existe un réel $r > 0$ et une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R \geqslant r$ vérifiant :

$$\forall x \in]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

- Soit f une fonction développable en série entière sur $]-r, r[$. Alors f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r, r[$ et $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. En particulier, le DSE d'une fonction est unique et donné par sa série de Taylor.
- Taylor reste intégrale et inégalité de Taylor-Lagrange.

3) Méthodes effectives pour obtenir un DSE

- Primitive ou dérivée d'une fonction DSE.
- CL ou produit de fonctions DSE.
- DSE appliqué en $-x$ ou en x^2, etc.
- Solution d'un problème de Cauchy linéaire.

4) DSE usuels