Semaine 13 (12/01–16/01) : séries entières

Consignes La colle débute par la restitution écrite d'un énoncé mathématique choisi par l'examinateur dans la liste fournie ci-après, l'écriture d'un DSE usuel (toujours au choix de l'examinateur) et par la détermination d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à une matrice $A \in O_3(\mathbb{R})$:

- rotation d'axe Δ et d'angle θ à déterminer ;
- réflexion par rapport à un plan Π à déterminer ;
- anti-rotation d'axe Δ et d'angle θ à déterminer (composée d'une rotation d'axe Δ et d'angle θ, et de la réflexion par rapport au plan $\Pi = \Delta^{\perp}$).

Tout ceci n'excèdera pas 20 minutes.

La colle se poursuivra par la résolution d'un ou plusieurs exercices fournis par l'examinateur dans le cadre des exigibles et du programme détaillé dans la suite.

Notation La connaissance du cours et l'étude déterminent la fourchette dans laquelle sera évalué l'étudiant :

- énoncé su, DSE et démonstration corrects : note minimale de 11/20 ;
- énoncé non su, DSE erroné et démonstration incorrecte : note maximale de 7/20 ;
- autre situation : note comprise entre 8 et 14.

Les colleurs sont libres d'utiliser toutes les notes allant de 0 à 20 dans le respect des contraintes ci-dessus.

Énoncés

Série entière de la variation réelle

Théorème d'Abel radial. La fonction somme d'une série entière est continue sur son intervalle de définition.

Intégration terme à terme. Notons $R = R\left(\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n\right)$. Alors la fonction somme d'une série entière s' intègre terme à terme sur l'intervalle ouvert de cv :

$$\forall x \in]-R,R[,\quad \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \left(\int_0^x t^n \mathrm{d}t\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

Dérivation terme à terme. La fonction somme d'une série entière de rayon de convergence $R > 0$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-R,R[$. De plus

$$\forall x \in]-R,R[,\quad \forall k \in \mathbb{N}^*,\quad \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \frac{\mathrm{d}^k}{\mathrm{d}x^k} x^n = \sum_{n=k}^{+\infty} n(n-1)\dots(n-k+1) a_n x^{n-k}.$$

Série de Taylor. Si une fonction f est DSE sur $]-r,r[$ alors f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r,r[$ et

$$\forall x \in]-r,r[,\quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Formule de Taylor reste intégral en 0. Soit $r > 0$ et soit f une fonction de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur $]-r,r[$. Alors,

$$\forall x \in]-r,r[,\quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t) \mathrm{d}t.$$

DSE usuels.

$\forall x \in]-1,1[$	
$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$	$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$
$\frac{1}{1-x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$	$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$
$\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$	$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}$
$\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$\frac{1}{2}\ln(1-x^2) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{2n}$
$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$	
$\mathrm{Arctan}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	

$\forall x \in \mathbb{R}$	
$\mathrm{e}^x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$	$\mathrm{e}^{-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n!}$
$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$
$\mathrm{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$\mathrm{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$

Généralités sur les isométries et les matrices orthogonales

Définition d'une isométrie. Une isométrie est un endomorphisme d'un espace euclidien qui préserve la norme. On note $O(E)$ l'ensemble des isométries de E.

Caractérisation d'une isométrie. $u \in \mathscr{L}(E)$ est une isométrie ssi il existe une BON de E dont l'image par u est une BON de E.

Définition d'une matrice orthogonale. $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si $M^\top M = I_n$. Dans ce cas, il vient aussi $MM^\top = I_n$. On note $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de taille n.

Caractérisation d'une matrice orthogonale. Une matrice est orthogonale ssi la famille de ses vecteurs colonnes (resp. lignes) est orthonormée pour le p.s. canonique sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

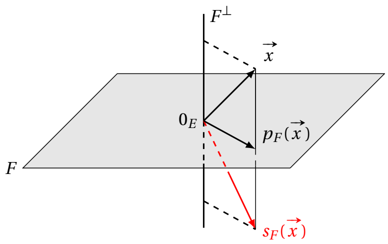
Lien entre isométrie et matrice orthogonale. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et soit $\mathscr{B}$ une BON de E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $u \in O(E)$ ssi $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \in O_n(\mathbb{R})$.

Propriétés du groupe orthogonal. Pour toutes $M, N \in O_n(\mathbb{R})$, $MN \in O_n(\mathbb{R})$, $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $M^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$.
Pour toutes $u, v \in O(E)$, $u \circ v \in O(E)$, $u \in \mathrm{GL}(E)$ et $u^{-1} \in O(E)$.

Déterminant d'une matrice orthogonale. Pour toute $M \in O_n(\mathbb{R})$, $\det M \in \{\pm 1\}$.
Réciproque fausse : $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ mais $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin O_2(\mathbb{R})$.

Déf. et prop. du groupe spécial orthogonal. $SO_n(\mathbb{R}) = \{M \in O_n(\mathbb{R}) : \det M = 1\}$; $SO(E) = \{u \in O(E) : \det u = 1\}$.
Pour toutes $M, N \in SO_n(\mathbb{R})$, $MN \in SO_n(\mathbb{R})$, $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $M^{-1} \in SO_n(\mathbb{R})$;
Pour toutes $u, v \in SO(E)$, $u \circ v \in SO(E)$, $u \in \mathrm{GL}(E)$ et $u^{-1} \in SO(E)$.

Définition d'une symétrie orthogonale. Soit F un sev d'un espace euclidien E. On définit la symétrie orthogonale par rapport à F comme la symétrie par rapport à F et parallèlement à $F^\perp$.
Dans le cas particulier où F est un hyperplan, on parle de réflexion par rapport à F.



Caractérisation des symétries orthogonales. $u \in \mathscr{L}(E)$ est une symétrie orthogonale ssi il existe une BON de E dans laquelle sa matrice est orthogonale et symétrique.

Matrice de passage entre deux BON. Toute matrice de passage P entre deux BON est orthogonale. En particulier, $P^{-1} = P^{\top}$.

Sous-espace stable et isométrie. Soit $u \in O(E)$ et soit F un sev de E. Si F est stable par u alors $F^{\perp}$ est stable par u.

Vp réelles possibles d'une matrice orthogonale. Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$. Alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M) \subset \{\pm 1\}$.
$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M)$ peut être vide, par ex si $M = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$;
$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M)$ peut être réduit à $\{1\}$, par ex si $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$) ;
$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M)$ peut être réduit à $\{-1\}$, par ex si $M = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$;
$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M)$ peut être égal à $\{\pm 1\}$, par ex si $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Programme détaillé

Liste des exigibles

- savoir déterminer le rayon de convergence d'une série entière ;
- connaître les propriétés de la somme d'une série entière réelle (continuité sur le domaine de définition, dérivation et intégration terme à terme sur l'intervalle ouvert de convergence) ;
- connaître et savoir obtenir le DSE de fonctions usuelles.
- Savoir déterminer les solutions DSE d'une équation différentielle.

I) Définitions et premiers exemples

1) Définition d'une série entière

- On appelle série entière toute série de la forme $\sum a_n z^n$ où $(a_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.
- Exemples : série géométrique ; série exponentielle, polynôme en z.

2) Rayon de convergence

- Lemme d'Abel : si $(a_n z_0^n)$ est bornée, alors $\sum a_n z^n$ CVA pour tout $|z| < |z_0|$.
- On définit le rayon de convergence R de la série entière $\sum a_n z^n$ par $R = \sup\{r \geqslant 0 : (a_n r^n) \text{ bornée}\} \in [0, +\infty]$.
- Si $|z| < R$, la série $\sum a_n z^n$ CVA ; si $|z| > R$, la série $\sum a_n z^n$ DVG.
- Disque ouvert de convergence $\{z \in \mathbb{C} : |z| < R\}$; intervalle ouvert de convergence $]-R, R[$.

3) Détermination pratique du rayon de convergence

- $R = \sup\{r \geqslant 0 : (a_n r^n) \text{ converge vers } 0\}$.
- $R = \sup\left\{r \geqslant 0 : \sum a_n r^n \text{ converge}\right\}$.
- Si $\sum a_n z_0^n$ CV alors $R \geqslant |z_0|$; si $\sum a_n z_0^n$ DV alors $R \leqslant |z_0|$.
- Si $|a_n| \leqslant |b_n|$ ou $a_n = o(b_n)$ ou $a_n = O(b_n)$, alors $R_a \geqslant R_b$.
- Si $a_n \sim b_n$ alors $R_a = R_b$.
- $\sum a_n z^n$, $\sum n a_n z^n$ et $\sum \frac{a_n}{n} z^n$ ont le même rayon de convergence.
- Rayon d'une somme : $R_{a+b} = \min(R_a, R_b)$ si $R_a \neq R_b$, et $R_{a+b} \geqslant R_a$ si $R_a = R_b$.
- Produit de Cauchy de deux séries entières.

II) Série entière de la variable réelle

1) Propriétés de la somme d'une série entière de la variable réelle (admises)

- On appelle somme de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.
- La fonction somme d'une série entière est continue sur son domaine de définition.
- Intégration terme à terme. Une primitive de la fonction somme sur $]-R, R[$ s'obtient en intégrant terme à terme la série entière :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

- Dérivation terme à terme. La fonction somme est dérivable sur $]-R, R[$. De plus sa dérivée s'obtient en dérivant terme à terme la série entière :

$$\forall x \in]-R, R[, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

2) Fonctions développables en séries entières

- On dit que f est développable en série entière s'il existe un réel $r > 0$ et une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R \geqslant r$ vérifiant :

$$\forall x \in]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

- Soit f une fonction développable en série entière sur $]-r, r[$. Alors f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r, r[$ et $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$. En particulier, le DSE d'une fonction est unique et donné par sa série de Taylor.
- Taylor reste intégrale et inégalité de Taylor-Lagrange.

3) Méthodes effectives pour obtenir un DSE

- Primitive ou dérivée d'une fonction DSE.
- CL ou produit de fonctions DSE.
- DSE appliqué en $-x$ ou en x^2, etc.
- Solution d'un problème de Cauchy linéaire.

4) DSE usuels