Semaine 14 (19/01–23/01) : isométries; matrices orthogonales; théorème spectral

Consignes La colle débute par la restitution écrite d'un énoncé mathématique choisi par l'examinateur dans la liste fournie ci-après et par la détermination d'un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ canoniquement associé à une matrice $A \in O_3(\mathbb{R})$:

— rotation d'axe Δ et d'angle θ à déterminer;

— réflexion par rapport à un plan Π à déterminer;

— anti-rotation d'axe Δ et d'angle θ à déterminer (composée d'une rotation d'axe Δ et d'angle θ, et de la réflexion par rapport au plan $\Pi = \Delta^{\perp}$).

Tout ceci n'excèdera pas 20 minutes.

La colle se poursuivra par la résolution d'un ou plusieurs exercices fournis par l'examinateur dans le cadre des exigibles et du programme détaillé dans la suite.

Notation La connaissance du cours et l'étude déterminent la fourchette dans laquelle sera évalué l'étudiant :

— énoncé su et détermination correcte : note minimale de 11/20;

— énoncé non su et détermination incorrecte : note maximale de 7/20;

— autre situation : note comprise entre 8 et 14.

Les colleurs sont libres d'utiliser toutes les notes allant de 0 à 20 dans le respect des contraintes ci-dessus.

Énoncés

Généralités sur les isométries et les matrices orthogonales

Définition d'une isométrie. Une isométrie est un endomorphisme d'un espace euclidien qui préserve la norme. On note $O(E)$ l'ensemble des isométries de E.

Caractérisation d'une isométrie. $u \in \mathscr{L}(E)$ est une isométrie ssi il existe une BON de E dont l'image par u est une BON de E.

Définition d'une matrice orthogonale. $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si $M^{\top}M = I_n$. Dans ce cas, il vient aussi $MM^{\top} = I_n$. On note $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de taille n.

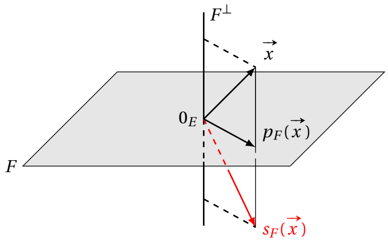
Caractérisation d'une matrice orthogonale. Une matrice est orthogonale ssi la famille de ses vecteurs colonnes (resp. lignes) est orthonormée pour le p.s. canonique sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

Lien entre isométrie et matrice orthogonale. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et soit $\mathscr{B}$ une BON de E de dimension $n \in \mathbb{N}^*$. Alors $u \in O(E)$ ssi $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \in O_n(\mathbb{R})$.

Propriétés du groupe orthogonal. Pour toutes $M, N \in O_n(\mathbb{R})$, $MN \in O_n(\mathbb{R})$, $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $M^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$.
Pour toutes $u, v \in O(E)$, $u \circ v \in O(E)$, $u \in \mathrm{GL}(E)$ et $u^{-1} \in O(E)$.

Déterminant d'une matrice orthogonale. Pour toute $M \in O_n(\mathbb{R})$, $\det M \in \{\pm 1\}$.
Réciproque fausse : $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ mais $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin O_2(\mathbb{R})$.

Déf. et prop. du groupe spécial orthogonal. $SO_n(\mathbb{R}) = \{M \in O_n(\mathbb{R}) : \det M = 1\}$; $SO(E) = \{u \in O(E) : \det u = 1\}$.
Pour toutes $M, N \in SO_n(\mathbb{R})$, $MN \in SO_n(\mathbb{R})$, $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $M^{-1} \in SO_n(\mathbb{R})$;
Pour toutes $u, v \in SO(E)$, $u \circ v \in SO(E)$, $u \in \mathrm{GL}(E)$ et $u^{-1} \in SO(E)$.



Définition d'une symétrie orthogonale. Soit F un sev d'un espace euclidien E. On définit la symétrie orthogonale par rapport à F comme la symétrie par rapport à F et parallèlement à $F^{\perp}$.
Dans le cas particulier où F est un hyperplan, on parle de réflexion par rapport à F.

Caractérisation des symétries orthogonales. $u \in \mathscr{L}(E)$ est une symétrie orthogonale ssi il existe une BON de E dans laquelle sa matrice est orthogonale et symétrique.

Matrice de passage entre deux BON. Toute matrice de passage P entre deux BON est orthogonale. En particulier, $P^{-1} = P^{\top}$.

Sous-espace stable et isométrie. Soit $u \in O(E)$ et soit F un sev de E. Si F est stable par u alors $F^{\perp}$ est stable par u.

Vp réelles possibles d'une matrice orthogonale. Soit $M \in O_n(\mathbb{R})$. Alors $\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M) \subset \{\pm 1\}$.
$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M)$ peut être vide, par ex si $M = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$;
$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M)$ peut être réduit à $\{1\}$, par ex si $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$;
$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M)$ peut être réduit à $\{-1\}$, par ex si $M = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$;
$\mathrm{Sp}_{\mathbb{R}}(M)$ peut être égal à $\{\pm 1\}$, par ex si $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

Autour du théorème spectral

Matrice et produit scalaire. Pour tous $X, Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, pour toute $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\langle AX | Y \rangle = \langle X | A^{\top} Y \rangle$.

Vp d'une matrice symétrique réelle. Toutes les vp d'une matrice symétrique réelle A sont réelles et χ_A est scindé sur $\mathbb{R}$.

Sep d'une matrice symétrique réelle. Les sep d'une matrice symétrique réelle sont deux à deux orthogonaux.

Théorème spectral. Toute matrice symétrique réelle A est orthodz : toutes ses vp sont réelles et il existe une BON de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formé de $\overrightarrow{\text{vp}}$ de A.
Matriciellement, cela signifie qu'il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ et $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ diagonale vérifiant $A = PDP^{\top}$.

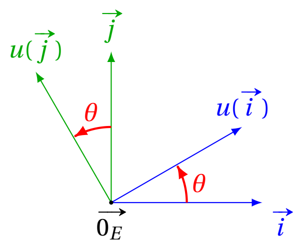
Isométries de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$

Description de $O_2(\mathbb{R})$. Soit $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Alors $M \in O_2(\mathbb{R})$ ssi $\exists \theta \in \mathbb{R}$: $M = \left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{smallmatrix}\right)$ ou $M = \left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{smallmatrix}\right)$.

Description de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = \{R_\theta : \theta \in \mathbb{R}\}$, où $R_\theta = \left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{smallmatrix}\right)$. De plus $R_\theta R_\varphi = R_{\theta+\varphi} = R_\varphi R_\theta$, $\forall (\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2$.

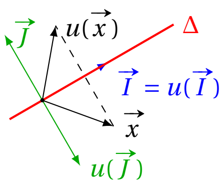
Isométrie positive de $\mathbb{R}^2$. Soit $u \in \mathrm{SO}(\mathbb{R}^2)$. Alors u est une rotation et il existe un unique réel $\theta \in]-\pi, \pi]$ tel que, pour toute BOND $\mathscr{B}$, on ait

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

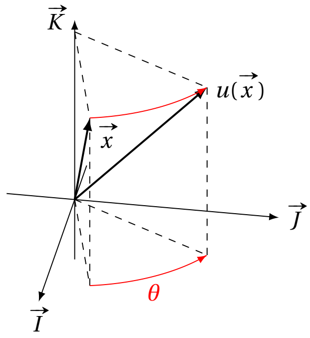


Isométrie négative de $\mathbb{R}^2$. Une isométrie négative u de $\mathbb{R}^2$ est une réflexion par rapport à la droite $\Delta = E_1(u)$. Si $\mathscr{B}_a = (\vec{I}, \vec{J})$ est une BOND adaptée à $\mathbb{R}^2 = \Delta \oplus \Delta^{\perp}$, alors

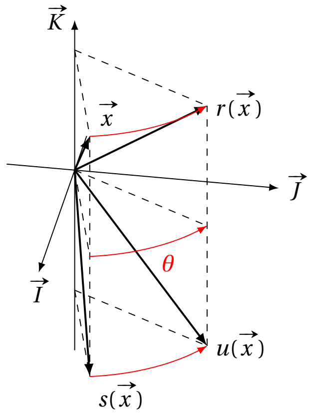
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_a}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$



Description des isométries de $\mathbb{R}^3$. Soit $u \in O(\mathbb{R}^3)$. Alors il existe une BOND $\mathscr{B}_a$, un réel $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ et un réel $\theta \in]-\pi,\pi]$ vérifiant $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_a}(u) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$.



Rotation de $\mathbb{R}^3$. On appelle rotation vectorielle de $\mathbb{R}^3$ tout élément $u \in \mathrm{SO}(\mathbb{R}^3)$. Il existe une BOND $\mathscr{B}_a$ et un angle $\theta \in]-\pi,\pi]$ vérifiant $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_a}(u) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
L'axe orienté de la rotation est $\Delta = E_1(u) = \mathrm{Vect}(\vec{K})$. L'angle θ vérifie $1 + 2\cos\theta = \mathrm{tr}(u)$ et $\mathrm{sgn}(\theta) = \mathrm{sgn}[\vec{x}, u(\vec{x}), \vec{K}]$, pour tout $\vec{x} \notin \Delta$.



Anti-rotation de $\mathbb{R}^3$. On appelle anti-rotation de $\mathbb{R}^3$ toute isométrie vectorielle négative u composée d'une rotation d'axe $\Delta = \mathrm{Vect}(\vec{K})$ et d'une réflexion s par rapport au plan $\Pi = \Delta^\perp$. Il existe une BOND $\mathscr{B}_a = (\vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ et un angle $\theta \in]-\pi,\pi]$ vérifiant $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_a}(u) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
L'axe orienté de l'anti-rotation est $\Delta = E_{-1}(u)$. L'angle θ vérifie $-1 + 2\cos\theta = \mathrm{tr}(u)$ et $\mathrm{sgn}(\theta) = \mathrm{sgn}[\vec{x}, u(\vec{x}), \vec{K}]$, pour tout $\vec{x} \notin \Delta$.

Programme détaillé

Liste des exigibles

- connaître les définitions d'isométrie vectorielle et de matrice orthogonale ;
- savoir faire le lien entre isométries et bases orthonormées ;
- connaître la classification des isométries vectorielles dans un espace de dimension 2 ;
- connaître la classification des isométries vectorielles dans un espace de dimension 3 ;
- connaître l'énoncé exact et complet du théorème spectral ;

I) Isométries vectorielles et matrices orthogonales

1) Définition et propriétés d'une isométrie vectorielle d'un espace euclidien

- Une isométrie de E est un endomorphisme de E qui préserve la norme, c'est-à-dire vérifiant, pour tout $\vec{x} \in E$, $\|u(\vec{x})\| = \|\vec{x}\|$. Notation $O(E)$.
- Un endomorphisme préserve la norme ssi il préserve le produit scalaire, c'est-à-dire ssi pour tout $(\vec{x}, \vec{y}) \in E^2$, $\langle u(\vec{x}) | u(\vec{y}) \rangle = \langle \vec{x} | \vec{y} \rangle$.
- Une isométrie est injective et donc bijective puisqu'elle agit sur un espace euclidien.
- Caractérisation des isométries via l'image d'une BON.
- Si un sev F de E est stable par $u \in O(E)$ alors $F^\perp$ est stable par u.
- Si $u \in O(E)$, alors $\mathrm{Sp}(u) \subset \{\pm 1\}$.

2) un exemple fondamental : les symétries orthogonales

- Définition d'une symétrie orthogonale, réflexion.
- Une symétrie préserve la norme ssi c'est une symétrie orthogonale.

3) Définition et propriétés d'une matrice orthogonale

- On dit qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si $A^\top A = I_n$ ou $AA^\top = I_n$. Notation $O_n(\mathbb{R})$.
- Une matrice est orthogonale ssi la famille de ses vecteurs colonnes est orthonormée.

4) Liens entre isométries et matrices orthogonales

- $u \in \mathscr{L}(E)$ est une isométrie vectorielle ssi sa matrice dans une BON est orthogonale.
- Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux BON de E. Alors $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$ est orthogonale.
- Un endomorphisme de E est une symétrie orthogonale ssi sa matrice dans toute BON est orthogonale et symétrique.

5) Groupes orthogonal et spécial orthogonal

- La composée de deux isométries vectorielles de E est une isométrie vectorielle.
- La réciproque d'une isométrie vectorielle de E est une isométrie vectorielle.
- Le produit de deux matrices orthogonales est orthogonale.
- Toute matrice orthogonale est inversible et son inverse est une matrice orthogonale.
- Le déterminant d'une matrice orthogonale (resp. d'une isométrie vectorielle) vaut soit 1, soit -1.
- On dit qu'une matrice orthogonale (resp. une isométrie vectorielle) est positive si son déterminant vaut 1, et négative sinon. Notations $SO(E)$ et $SO_n(\mathbb{R})$.
- $SO(E)$ et $SO_n(\mathbb{R})$ sont resp. stables par composition et produit, et par inverse.

II) Description des isométries vectorielles en dimension 2 et 3

1) Orientation d'un espace vectoriel de dimension finie.

2) Isométries vectorielles en dimension 2

- Soit $M \in O_2(\mathbb{R})$. Alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ vérifiant $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ si M et positive, ou bien $M = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ si M est négative.
- Le groupe $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est commutatif.
- Soit E un espace euclidien orienté de dimension 2, soit u dans $\mathrm{SO}(E)$. Alors, il existe un unique réel θ dans $]-\pi,\pi]$ telle que, pour toute base orthonormée directe $\mathscr{B}$, on ait
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$
On dira que f est la <u>rotation vectorielle</u> d'angle de mesure θ.
- Soit E un espace euclidien dimension 2 et soit s une isométrie vectorielle négative de E. Alors, s est une réflexion par rapport à la droite $\Delta = E_1(s)$.

3) Isométries vectorielles en dimension 3

- Toute matrice $M \in O_3(\mathbb{R})$ possède au moins une valeur propre égale soit à 1, soit à -1.
- Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3 et soit u une isométrie vectorielle de E. Alors il existe une BON directe $\mathscr{B}_a$, un réel $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ et un réel $\theta \in]-\pi,\pi]$ vérifiant
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_a}(u) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}.$$
- Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3. On appelle rotation vectorielle de E tout isométrie vectorielle positive, c'est-à-dire tout élément u de $\mathrm{SO}(E)$. Il existe une BON directe $\mathscr{B}_a$ et un angle $\theta \in]-\pi,\pi]$ vérifiant
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_a}(u) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
- On appelle matrice de rotation tout élément M de $SO_3(\mathbb{R})$.
- Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3. On appelle anti-rotation de E toute isométrie vectorielle négative u composée d'une rotation d'axe Δ et d'une réflexion par rapport au plan $\Pi = \Delta^\perp$. Il existe une BON directe $\mathscr{B}_a$ et un angle $\theta \in]-\pi,\pi]$ vérifiant
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_a}(u) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

III) Théorème spectral

- Toutes les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle sont réelles et son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$.
- Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, pour tout $(X,Y) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\langle AX|\,Y\rangle = \langle X|A^\top Y\rangle$.
- Les sous-espaces propres d'une matrice symétrique réelle sont deux à deux orthogonaux pour le produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- Toute matrice symétrique réelle A est orthodiagonalisable : elle est diagonalisable et il existe une BON de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A. En conséquence, il existe P orthogonale et D diagonale vérifiant $A = PDP^\top$.