### Semaine 15 (27/01–31/02) : isométries et matrices orthogonales ; théorème spectral

**Consignes**. La colle débute par la restitution écrite d'énoncés mathématiques choisis par l'examinateur dans la liste fournie ci-après. Cette restitution n'excèdera pas 8 minutes sinon les énoncés manquants seront considérés comme non sus. Pour cette semaine :

— Un énoncé pioché dans « généralités sur les isométries et les matrices orthogonales ».

— Un énoncé pioché dans « théorème spectral ».

— Un énoncé pioché dans « isométries de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$ »(dessin inclus le cas échéant).

La colle se poursuivra par la résolution d'un ou plusieurs exercices fournis par l'examinateur dans le cadre des exigibles et du programme détaillé dans la suite.

**Notation**. La connaissance du cours détermine la fourchette dans laquelle sera évalué l'étudiant :

— 3 énoncés sus : note minimale de 9/20 ;

— 1 énoncé erroné ou non su : note maximale de 13/20 ;

— 2 énoncés erronés ou non sus : note maximale de 9/20 ;

— 3 énoncés erronés ou non sus : note maximale de 6/20.

Les colleurs sont libres d'utiliser toutes les notes allant de 0 à 20 dans le respect des contraintes ci-dessus.

---

## Énoncés

#### Généralités sur les isométries et les matrices orthogonales

Définition d'une isométrie. Une isométrie est un endomorphisme d'un espace euclidien qui préserve la norme. On note $O(E)$ l'ensemble des isométries de $E$.

Caractérisation d'une isométrie. $u \in \mathscr{L}(E)$ est une isométrie ssi il existe une BON de $E$ dont l'image par $u$ est une BON de $E$.

Définition d'une matrice orthogonale. $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est dite orthogonale si $M^\top M = I_n$. Dans ce cas, il vient aussi $MM^\top = I_n$. On note $O_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices orthogonales de taille $n$.

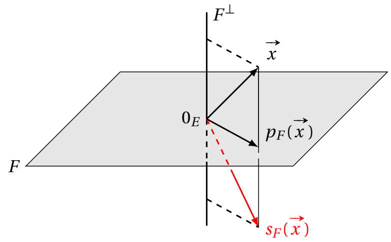
Caractérisation d'une matrice orthogonale. Une matrice est orthogonale ssi la famille de ses vecteurs colonnes (resp. lignes) est orthonormée.

Lien entre isométrie et matrice orthogonale. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ et soit $\mathscr{B}$ une BON de $E$.
Alors $u \in O(E)$ ssi $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) \in O_n(\mathbb{R})$, où $n = \dim E$.

Propriétés du groupe orthogonal. $\forall M, N \in O_n(\mathbb{R})$, $MN \in O_n(\mathbb{R})$ ; $\forall u, v \in O(E)$, $u \circ v \in O(E)$.
$\forall M \in O_n(\mathbb{R})$, $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $M^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$ ; $\forall u \in O(E)$, $\in \mathrm{GL}(E)$ et $u^{-1} \in O(E)$.

Déterminant d'une matrice orthogonale. $\forall M \in O_n(\mathbb{R})$, $\det M \in \{\pm 1\}$.
Réciproque fausse : $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$ mais $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \notin O_2(\mathbb{R})$.

Déf. et prop. du groupe spécial orthogonal. $SO_n(\mathbb{R}) = \{M \in O_n(\mathbb{R}) : \det M = 1\}$ ; $SO(E) = \{u \in O(E) : \det u = 1\}$.
$\forall M, N \in SO_n(\mathbb{R})$, $MN \in SO_n(\mathbb{R})$ ; $\forall u, v \in SO(E)$, $u \circ v \in SO(E)$.
$\forall M \in SO_n(\mathbb{R})$, $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $M^{-1} \in SO_n(\mathbb{R})$ ; $\forall u \in SO(E)$, $u \in \mathrm{GL}(E)$ et $u^{-1} \in SO(E)$.




Définition d'une symétrie orthogonale. Soit $F$ un sev d'un espace euclidien $E$. On définit la symétrie orthogonale par rapport à $F$ comme la symétrie par rapport à $F$ et parallèlement à $F^\perp$. Dans le cas particulier où $F$ est un hyperplan, on parle de réflexion par rapport à $F$.

Caractérisation des symétries orthogonales. $u \in \mathscr{L}(E)$ est une symétrie orthogonale ssi il existe une BON de $E$ dans laquelle sa matrice est orthogonale et symétrique.

Matrice de passage entre deux BON. Toute matrice de passage $P$ entre deux BON est orthogonale. En particulier, $P^{-1} = P^\top$.

Sous-espace stable et isométrie. Soit $u \in O(E)$ et soit $F$ un sev de $E$. Si $F$ est stable par $u$ alors $F^\perp$ est stable par $u$.

Vp réelles possibles d'une matrice orthogonale. Soit $M \in O_2(\mathbb{R})$. Alors $\mathrm{Sp}_\mathbb{R}(M) \subset \{\pm 1\}$.
$\mathrm{Sp}_\mathbb{R}(M)$ peut être vide, par ex $M = \left(\begin{smallmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{smallmatrix}\right)$ ;
$\mathrm{Sp}_\mathbb{R}(M)$ peut être réduit à $\{1\}$, par ex $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{smallmatrix}\right)$) ;
$\mathrm{Sp}_\mathbb{R}(M)$ peut être réduit à $\{-1\}$, par ex $M = \left(\begin{smallmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$ ;
$\mathrm{Sp}_\mathbb{R}(M)$ peut être égal à $\{\pm 1\}$, par ex $M = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right)$.

### Autour du théorème spectral

Matrice et produit scalaire. $\forall X, Y \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\langle AX|Y\rangle = \langle X|A^\top Y\rangle$.

Vp d'une matrice symétrique réelle. Toutes les vp d'une matrice symétrique réelle $A$ sont réelles et $\chi_A$ est scindé sur $\mathbb{R}$.

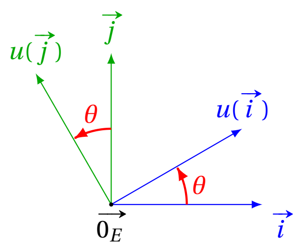
Sep d'une matrice symétrique réelle. Les sep d'une matrice symétrique réelle sont deux à deux orthogonaux.

Théorème spectral. Toute matrice symétrique réelle est orthodz : toutes ses vp sont réelles et elle possède une BON de $\overrightarrow{\mathrm{vp}}$ .

## Isométries de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$

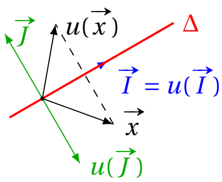
Description de $O_2(\mathbb{R})$. Soit $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Alors $M \in O_2(\mathbb{R})$ ssi $\exists \theta \in \mathbb{R}$ : $M = \left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{smallmatrix}\right)$ ou $M = \left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{smallmatrix}\right)$.

Description de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$. $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = \{R_\theta : \theta \in \mathbb{R}\}$, où $R_\theta = \left(\begin{smallmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{smallmatrix}\right)$. De plus $R_\theta R_\varphi = R_{\theta+\varphi} = R_\varphi R_\theta$, $\forall (\theta, \varphi) \in \mathbb{R}^2$.




Isométrie positive de $\mathbb{R}^2$. Soit $u \in \mathrm{SO}(\mathbb{R}^2)$. Alors $u$ est une rotation et il existe un unique réel $\theta \in ]-\pi, \pi]$ tel que, pour toute BOND $\mathscr{B}$, on ait

$$\mathrm{Mat}_\mathscr{B}(u) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

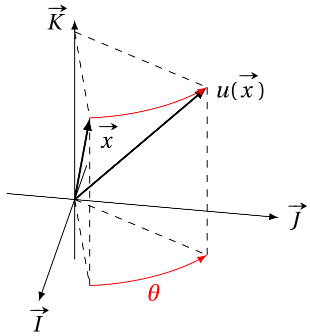



Isométrie négative de $\mathbb{R}^2$. Une isométrie négative $u$ de $\mathbb{R}^2$ est une réflexion par rapport à la droite $\Delta = E_1(u)$. Si $\mathscr{B}_a = (\vec{I}, \vec{J})$ est une BOND directe adaptée à $\mathbb{R}^2 = \Delta \oplus \Delta^\perp$, alors

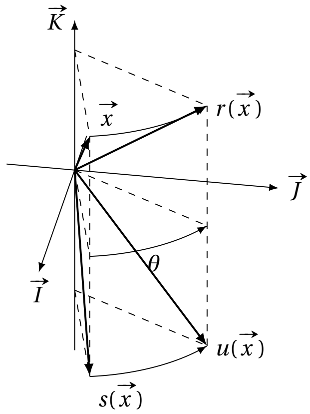
$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_a}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Description des isométries de $\mathbb{R}^3$. Soit $u \in O(\mathbb{R}^3)$. Alors il existe une BOND $\mathscr{B}_a$, un réel $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ et un réel

$\theta \in ]-\pi,\pi]$ vérifiant $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_a}(u) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{pmatrix}$.




Rotation de $\mathbb{R}^3$. On appelle rotation vectorielle de $\mathbb{R}^3$ tout élément $u \in SO(\mathbb{R}^3)$. Il existe une BOND $\mathscr{B}_a$ et un angle $\theta \in ]-\pi,\pi]$ vérifiant $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_a}(u) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
L'axe orienté de la rotation est $\Delta = E_1(u) = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{K})$. L'angle $\theta$ vérifie $1 + 2\cos\theta = \mathrm{tr}(u)$ et $\mathrm{sgn}(\theta) = \mathrm{sgn}[\overrightarrow{x}, u(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{K}]$, pour tout $\overrightarrow{x} \notin \Delta$.




Anti-rotation de $\mathbb{R}^3$. On appelle anti-rotation de $\mathbb{R}^3$ toute isométrie vectorielle négative $u$ composée d'une rotation d'axe $\Delta = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{K})$ et d'une réflexion $s$ par rapport au plan $\Pi = \Delta^\perp$. Il existe une BOND $\mathscr{B}_a = (\overrightarrow{I}, \overrightarrow{J}, \overrightarrow{K})$ et un angle $\theta \in ]-\pi,\pi]$ vérifiant $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_a}(u) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
L'axe orienté de l'anti-rotation est $\Delta = E_{-1}(u)$. L'angle $\theta$ vérifie $-1 + 2\cos\theta = \mathrm{tr}(u)$ et $\mathrm{sgn}(\theta) = \mathrm{sgn}[\overrightarrow{x}, u(\overrightarrow{x}), \overrightarrow{K}]$, pour tout $\overrightarrow{x} \notin \Delta$.

# Programme détaillé

**Liste des exigibles**

— comprendre la notion d'isométrie vectorielle et de matrice orthogonale;
— connaître la classification des isométries vectorielles dans un espace de dimension 2;
— connaître la classification des isométries vectorielles dans un espace de dimension 3;
— connaître l'énoncé exact et complet du théorème spectral.

I) Isométries vectorielles et matrices orthogonales

1) Définition et propriétés d'une isométrie vectorielle d'un espace euclidien

- On dit que $u \in \mathscr{L}(E)$ préserve la norme si : $\forall \overrightarrow{x} \in E, \|u(\overrightarrow{x})\| = \|\overrightarrow{x}\|$.
- Une isométrie de $E$ est un endomorphisme de $E$ qui préserve la norme.
- On dit que $u \in \mathscr{L}(E)$ préserve le produit scalaire si : $\forall(\overrightarrow{x},\overrightarrow{y}) \in E^2, \langle u(\overrightarrow{x})|u(\overrightarrow{y})\rangle = \langle \overrightarrow{x}\,|\,\overrightarrow{y}\rangle$
- Un endomorphisme préserve la norme ssi il préserve le produit scalaire.
- Un endomorphisme qui préserve la norme est injectif et donc bijectif s'il agit sur un espace euclidien
- Un endomorphisme d'un espace euclidien qui préserve la norme est appelé une isométrie vectorielle (ou bien un automorphisme orthogonal mais à éviter).

2) un exemple fondamental : les symétries orthogonales

- Définition d'une symétrie orthogonale, réflexion.
- Une symétrie préserve la norme ssi c'est une symétrie orthogonale.
- Caractérisation des isométries via l'image d'une BON.
- Si un sev $F$ de $E$ est stable par $u \in O(E)$ alors $F^\perp$ est stable par $u$.

3) Définition et propriétés d'une matrice orthogonale

- On dit qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si $A^\top A = I_n$ ou $AA^\top = I_n$.
- Une matrice est orthogonale ssi la famille de ses vecteurs colonnes est orthonormée.
- $u \in \mathscr{L}(E)$ est une isométrie vectorielle ssi sa matrice dans une BON est orthogonale.
- Soient $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ deux BON de $E$. Alors $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}$ est orthogonale.
- Un endomorphisme de $E$ est une symétrie orthogonale ssi sa matrice dans toute BON est orthogonale et symétrique.

4) Groupe orthogonal

- La composée de deux isométries vectorielles de $E$ est une isométrie vectorielle.
- La réciproque d'une isométrie vectorielle de $E$ est une isométrie vectorielle.
- L'ensemble des isométries vectorielles d'un espace euclidien $E$ forme un groupe noté $O(E)$ et appelé le groupe orthogonal de $E$.
- Le produit de deux matrices orthogonales est orthogonale.
- Toute matrice orthogonale est inversible et son inverse est une matrice orthogonale.
- L'ensemble des matrices orthogonales de taille $n$ forme un groupe noté $O_n(\mathbb{R})$ et appelé groupe orthogonal de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

5) Groupe spécial orthogonal

- Le déterminant d'une matrice orthogonale (resp. d'une isométrie vectorielle) vaut soit 1, soit $-1$.
- On dit qu'une matrice orthogonale (resp. une isométrie vectorielle) est positive si son déterminant vaut 1, et négative sinon.
- Le produit de deux matrices orthogonales (resp. deux isométries vectorielles) positives est une matrice orthogonale (resp. une isométrie vectorielle) positive.
- L'inverse d'une matrice orthogonale (resp. une isométrie vectorielle) positive est une matrice orthogonale (resp. une isométrie vectorielle) positive.
- L'ensemble des matrices orthogonales positives forme un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$ noté $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ et appelé groupe spécial orthogonal de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

- L'ensemble des isométries vectorielles positives forme un sous-groupe de $O(E)$ noté $\mathrm{SO}(E)$ et appelé groupe spécial orthogonal de $E$.

6) Théorème spectral

- Toutes les valeurs propres d'une matrice symétrique réelle sont réelles et son polynôme caractéristique est scindé sur $\mathbb{R}$.
- Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, pour tout $(X, Y) \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \times \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, $\langle AX|\, Y\rangle = \langle X|A^\top Y\rangle$.
- Les sous-espaces propres d'une matrice symétrique réelle sont deux à deux orthogonaux pour le produit scalaire canonique sur $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- Toute matrice symétrique réelle $A$ est orthodiagonalisable : elle est diagonalisable et possède une BON de vecteurs propres. En conséquence, il existe $P$ orthogonale et $D$ diagonale vérifiant $A = PDP^\top$.

II) Description des isométries vectorielles en dimension 2 et 3

1) Orientation d'un espace vectoriel de dimension finie.

- On dit que deux bases $\mathscr{B}$ et $\mathscr{B}'$ d'un espace euclidien ont la même orientation si $\det(P_{\mathscr{B}\to\mathscr{B}'}) > 0$.
- Soit $\mathscr{B}$ une base fixée de $E$ arbitrairement dite directe. Une autre base $\mathscr{B}'$ de $E$ est dite directe si $\mathscr{B}'$ a la même orientation que $\mathscr{B}$. Dans le cas contraire on dit que $\mathscr{B}'$ est indirecte.
- Soit $\mathscr{B}$ une base fixée de $E$ dite directe. Si $\mathscr{B}'$ et $\mathscr{B}''$ sont toutes les deux directes ou toutes les deux indirectes, elles ont la même orientation.

2) Isométries vectorielles en dimension 2

- Soit $M \in O_2(\mathbb{R})$. Alors il existe $\theta \in \mathbb{R}$ vérifiant $M = \left(\begin{smallmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{smallmatrix}\right)$ si $M$ et positive, ou bien $M = \left(\begin{smallmatrix}\cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta\end{smallmatrix}\right)$ si $M$ est négative.
- Le groupe $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est commutatif.
- Soit $E$ un espace euclidien orienté de dimension 2, soit $u$ dans $\mathrm{SO}(E)$. Alors, il existe un unique réel $\theta$ dans $]-\pi, \pi]$ telle que, pour toute base orthonormée directe $\mathscr{B}$, on ait

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}.$$

On dira que $f$ est la <u>rotation vectorielle</u> d'angle de mesure $\theta$.

- Soit $E$ un espace euclidien dimension 2 et soit $s$ une isométrie vectorielle négative de $E$. Alors, $s$ est une réflexion par rapport à la droite $\Delta = E_1(s)$.

3) Isométries vectorielles en dimension 3

- Toute matrice $M \in O_3(\mathbb{R})$ possède au moins une valeur propre égale soit à 1, soit à $-1$.
- Soit $E$ un espace euclidien orienté de dimension 3 et soit $u$ une isométrie vectorielle de $E$. Alors il existe une BON directe $\mathscr{B}_a$, un réel $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ et un réel $\theta \in ]-\pi, \pi]$ vérifiant

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_a}(u) = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon\end{pmatrix}.$$

- Soit $E$ un espace euclidien orienté de dimension 3. On appelle rotation vectorielle de $E$ tout isométrie vectorielle positive, c'est-à-dire tout élément $u$ de $\mathrm{SO}(E)$. Il existe une BON directe $\mathscr{B}_a$ et un angle $\theta \in ]-\pi, \pi]$ vérifiant

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_a}(u) = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

- On appelle matrice de rotation tout élément $M$ de $SO_3(\mathbb{R})$.
- Soit $E$ un espace euclidien orienté de dimension 3. On appelle anti-rotation de $E$ toute isométrie vectorielle négative $u$ composée d'une rotation d'axe $\Delta$ et d'une réflexion par rapport au plan $\Pi = \Delta^\perp$. Il existe une BON directe $\mathscr{B}_a$ et un angle $\theta \in ]-\pi, \pi]$ vérifiant

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}_a}(u) = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix}$$