Semaine 16 (02/02–06/02) : géométrie plane ; courbes paramétrées

Consignes La colle débute par la restitution écrite d'un énoncé mathématique choisi par l'examinateur dans la liste fournie ci-après.

La colle se poursuivra par la résolution d'un ou plusieurs exercices fournis par l'examinateur dans le cadre des exigibles.

Notation La connaissance du cours et l'étude détermine la fourchette dans laquelle sera évalué l'étudiant :

- énoncé su : note minimale de 11/20 ;
- énoncé non su : note maximale de 14/20 ;

Les colleurs sont libres d'utiliser toutes les notes allant de 0 à 20 dans le respect des contraintes ci-dessus.

Énoncés

Bases de géométrie affine du plan

Droite. Si $\mathscr{D}$ est la droite affine passant par $A(x_A, y_A)$ et :

- dirigée par $\vec{\tau} = \binom{\tau_x}{\tau_y}$, alors $M \in \mathscr{D}$ ssi $[\overrightarrow{AM}, \vec{\tau}] = 0$ ssi $\tau_y(x - x_A) - \tau_x(y - y_A) = 0$;
- de vecteur normal $\vec{n} = \binom{n_x}{n_y}$, alors $M \in \mathscr{D}$ ssi $\langle \overrightarrow{AM} | \vec{n} \rangle = 0$ ssi $n_x(x - x_A) + n_y(y - y_A) = 0$.

Une représentation paramétrique de la droite $\mathscr{D}$ est donnée par

$$\begin{cases} x(\lambda) = x_A + \lambda \tau_x, \\ y(\lambda) = y_A + \lambda \tau_y, \end{cases} \lambda \in \mathbb{R}.$$

Cercle. Le cercle de centre $\Omega(x_\Omega, y_\Omega)$ et de rayon $r > 0$ a pour équation $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = r^2$.
Une représentation paramétrique du cercle est donnée par

$$\begin{cases} x(\theta) = x_\Omega + r\cos\theta, \\ y(\theta) = y_\Omega + r\sin\theta, \end{cases} \theta \in \mathbb{R}.$$

Distance d'un point à une droite. Si $\mathscr{D}$ est une droite du plan affine

- passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$, $d(M, \mathscr{D}) = \frac{|\langle \overrightarrow{AM} | \vec{n} \rangle|}{\|\vec{n}\|}$;
- passant par A et de vecteur directeur $\vec{u}$, $d(M, \mathscr{D}) = \frac{|[\overrightarrow{AM}, \vec{u}]|}{\|\vec{u}\|}$;
- d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$, $d(M, \mathscr{D}) = \frac{|ax_M + bx_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Coniques

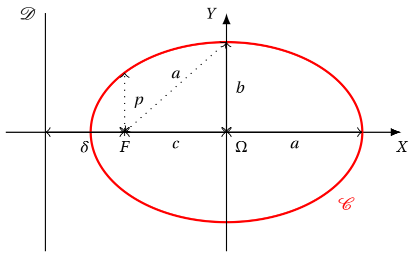
Définition d'une conique par foyer, directrice et excentricité. On appelle conique $\mathscr{C}$ de foyer F, de directrice $\mathscr{D}$ et d'excentricité e, l'ensemble des points M du plan vérifiant $MF = e \cdot MH$, où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{D}$.

Ellipse. Une ellipse $\mathscr{E}$ est une conique d'excentricité $e < 1$. Dans un repère orthonormé adapté $\mathscr{R}_a = (\Omega; \vec{I}; \vec{J})$, où $\vec{I}$ dirige l'axe focal, une équation cartésienne de $\mathscr{E}$ est de la forme $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$, où $a > b > 0$. On appelle alors :

— centre de l'ellipse le point Ω (qui appartient à l'axe focal et constitue un centre de symétrie pour $\mathscr{C}$) ;

— grand axe la droite (ΩX) (en fait l'axe focal) et grand rayon la quantité a ;

— petit axe la droite (ΩY) (qui est un autre axe de symétrie de l'ellipse) et petit rayon la quantité b.

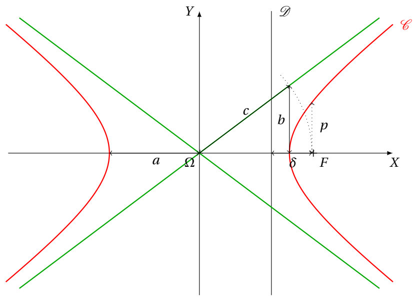


Une représentation paramétrique de l'ellipse est donnée par $\begin{cases} X(t) = a\cos t, \\ Y(t) = b\sin t, \end{cases} t \in \mathbb{R}$.

Hyperbole. Une hyperbole $\mathscr{H}$ est une conique d'excentricité $e > 1$. Dans un repère orthonormé adapté $\mathscr{R}_a = (\Omega; \vec{I}; \vec{J})$, où $\vec{I}$ dirige l'axe focal, une équation cartésienne de $\mathscr{H}$ est de la forme $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$, où $a, b > 0$. On appelle :

— centre de l'hyperbole le point Ω (qui appartient à l'axe focal et constitue un centre de symétrie pour $\mathscr{C}$) ;

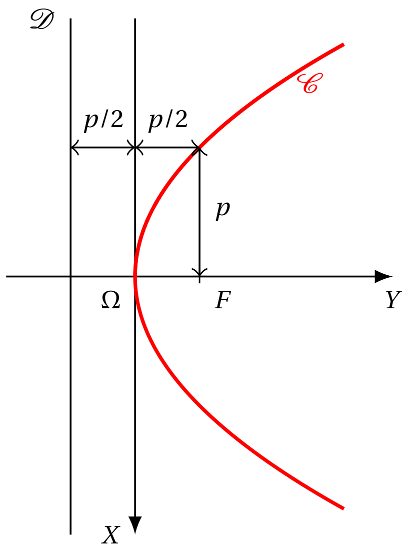
— asymptotes les deux droites affines d'équations $\frac{X}{a} - \frac{Y}{b} = 0$ et $\frac{X}{a} + \frac{Y}{b} = 0$.



Une représentation paramétrique de la branche de l'hyperbole située dans le demi-plan $X \geqslant 0$ est donnée par $\begin{cases} X(t) = a\operatorname{ch} t, \\ Y(t) = b\operatorname{sh} t, \end{cases} t \in \mathbb{R}$.

Parabole. Une parabole $\mathscr{C}$ est une conique d'excentricité $e = 1$. Dans un repère orthonormé adapté $(\Omega; \vec{I}; \vec{J})$, où $\vec{J}$ dirige l'axe focal, une équation cartésienne de $\mathscr{C}$ est de la forme $2pY = X^2$. Une représentation paramétrique de la parabole est donnée par

$$\begin{cases} X(t) = t, \\ Y(t) = \dfrac{t^2}{2p}, \end{cases} t \in \mathbb{R}$$



Classification des coniques. Soit $\mathscr{C}$ une conique d'équation $ax^2 + 2bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$. On note $A = \left(\begin{smallmatrix} a & b \\ b & c \end{smallmatrix}\right)$ la matrice associée à $q : (x, y) \mapsto ax^2 + 2bxy + cy^2$.

— Si $A \in \operatorname{Vect}(I_2)$, $\mathscr{C}$ est de type cercle ;

— si $A \notin \operatorname{Vect}(I_2)$ et $\det(A) > 0$, $\mathscr{C}$ est de type ellipse ;

— si $A \notin \operatorname{Vect}(I_2)$ et $\det(A) < 0$, $\mathscr{C}$ est de type hyperbole ;

— si $\det(A) = 0$, $\mathscr{C}$ est de type parabole.

Courbes paramétrées

Tangente. Γ possède une tangente $\mathscr{T}_0$ au point $M(t_0)$ si la pente $p(t)=\frac{y(t)-y(t_0)}{x(t)-x(t_0)}$ de la sécante $(M(t_0)M(t))$ admet une limite finie, ou si $1/p(t)$ tend vers 0, quand $t\to t_0$.

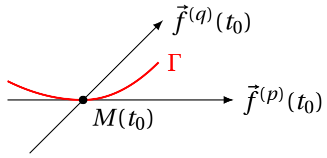
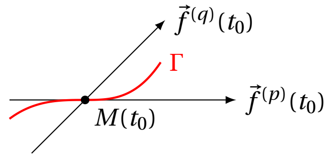
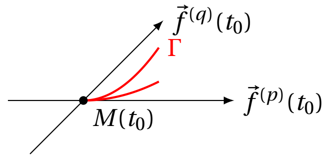
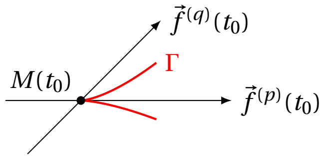
- Si $p(t)\xrightarrow[t\to t_0]{}\lambda\in\mathbb{R}$, $\mathscr{T}_0$ a pour pente λ.
- Si $1/p(t)\xrightarrow[t\to t_0]{}0$, $\mathscr{T}_0$ est « verticale ».

Point régulier. On dit que le point $M(t_0)\in\Gamma$ paramétrée par $(I,\vec{f})$ est régulier si le vecteur $\vec{f}\,'(t_0)$ est non nul. Dans ce cas, Γ possède une tangente en $M(t_0)$ dirigée par $\vec{f}\,'(t_0)$.

Étude locale. On suppose que les entiers suivants sont bien définis :

$$p=\min\left\{k\in\mathbb{N}^*\,:\,\vec{f}^{(k)}(t_0)\neq\vec{0}\right\}\quad\text{et}\quad q=\min\left\{k>p\,:\,\left(\vec{f}^{(p)}(t_0),\vec{f}^{(k)}(t_0)\right)\text{ libre}\right\}.$$

Alors $f^{(p)}(t_0)$ dirige la tangente à Γ en M_0. De plus, il vient la classification suivante.

	q pair	q impair
p impair	 *point ordinaire*	 *point d'inflexion*
p pair	 *point de rebroussement de 2ᵉ espèce*	 *point de rebroussement de 1ʳᵉ espèce*

Point birégulier. On dit que le point $M(t_0)\in\Gamma$ paramétrée par $(I,\vec{f})$ est birégulier si la famille $\left(\vec{f}\,'(t_0),\vec{f}\,''(t_0)\right)$ est libre.

Asymptote. On dit que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $ax+by+c=0$ est asymptote à Γ paramétrée par $(I,\vec{f})$ au voisinage de $t_0\in\bar{I}$ si $x(t)\xrightarrow[t\to t_0]{}\pm\infty$ et/ou $y(t)\xrightarrow[t\to t_0]{}\pm\infty$, et si $ax(t)+by(t)+c\xrightarrow[t\to t_0]{}0$.

Longueur d'arc. Pour une courbe Γ régulière de classe $\mathscr{C}^1$ de représentation paramétrique $(I,\vec{f})$, $\widehat{M(a)M(b)}=\int_a^b\|\vec{f}\,'(t)\|\mathrm{d}t=\int_a^b\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\mathrm{d}t$.

Abscisse curviligne. Soit Γ une courbe régulière de classe $\mathscr{C}^1$ de représentation paramétrique $(I,\vec{f})$. On appelle abscisse curviligne à partir du point $M(t_0)$ la fonction s_{t_0} définie sur I par

$$\forall t\in I,\quad s_{t_0}(t)=\int_{t_0}^{t}\left\|\vec{f}\,'(u)\right\|\mathrm{d}u=\widehat{M(t_0)M(t)}.$$

Paramétrisation normale. Une paramétrisation $(I,\vec{f})$ d'une courbe Γ est dite normale (ou par abscisse curviligne) si pour tout $[t_1,t_2]\subset I$, $\widehat{M(t_1)M(t_2)}=t_2-t_1$. C'est le cas si, et seulement si, $\forall t\in I$, $\|\vec{f}\,'(t)\|=1$.

Courbure et formules de Frenet. Soit Γ une courbe régulière de classe $\mathscr{C}^2$ paramétrée par abscisse curviligne. On appelle courbure la fonction γ vérifiant $\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s}=\gamma\vec{N}$ et $\frac{\mathrm{d}\vec{N}}{\mathrm{d}s}=-\gamma\vec{T}$.

Relèvement et courbure. Soit Γ une courbe régulière de classe $\mathscr{C}^2$. Un relèvement de $\vec{T}$ est une fonction α de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant $\vec{T}=\cos(\alpha)\,\vec{i}+\sin(\alpha)\,\vec{j}$. Une telle fonction existe toujours et permet d'obtenir la courbure via la relation $\gamma=\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}$.

Centre, rayon et cercle de courbure. Soit Γ une courbe birégulière de classe $\mathscr{C}^2$. On appelle rayon de courbure au point $M(t)$ le réel $R(t) = 1/\gamma(t)$; centre de courbure le point $C(t)$ vérifiant $\overrightarrow{M(t)C(t)} = R(t)\overrightarrow{N(t)}$ et cercle de courbure le cercle de centre $C(t)$ et de rayon $[C(t)M(t)]$.

Enveloppe. Une courbe Γ est l'enveloppe d'une famille de droites $(\mathscr{D}_t)_{t \in I}$ si

— chaque droite $\mathscr{D}_t$ est tangente à Γ ;

— pour tout $M \in \Gamma$, il existe $t \in I$ tel que $\mathscr{D}_t$ soit tangente à Γ au point M.

Si $\mathscr{D}_t$ passe par $A(t)$ et est dirigée par $\vec{u}(t)$, le point de tangence $M(t)$ de $\mathscr{D}_t$ et Γ vérifie $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \lambda \vec{u}$ et $\left[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t}, \vec{u}\right] = \left[\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{OA}}{\mathrm{d}t}, \vec{u}\right] + \lambda\left[\frac{\mathrm{d}\vec{u}}{\mathrm{d}t}, \vec{u}\right] = 0$.

Développée. Soit Γ une courbe birégulière de classe $\mathscr{C}^2$. On appelle développée de Γ la courbe constituée de l'ensemble de ses centres de courbures. C'est également l'enveloppe des normales à Γ.

Programme détaillé

Liste des exigibles

— savoir déterminer l'équation cartésienne d'une droite ou d'un cercle du plan ;

— savoir déterminer un vecteur directeur ou un vecteur normal à une droite ;

— connaître la définition d'une conique par foyer, directrice et excentricité ;

— savoir obtenir l'équation cartésienne d'une conique ;

— savoir réduire une équation de degré 2 et tracer la conique associée ;

— connaître le vocabulaire lié aux courbes paramétrées planes ;

— pouvoir réduire le domaine d'étude d'une courbe paramétrée ;

— savoir tracer un tableau de variations conjoint ;

— savoir étudier une branche infinie ;

— savoir étudier localement un point régulier ou stationnaire ;

— savoir tracer l'allure d'une courbe paramétrée ;

— savoir calculer une longueur d'arc ;

— connaître la définition d'une abscisse curviligne, du repère de Frenet et de la courbure ;

— savoir paramétrer l'enveloppe d'une famille de droites ;

— savoir paramétrer la développée d'une courbe.