

Semaine 17 (23/02–27/02) : calcul différentiel

Consignes La colle débute par la restitution écrite d'un énoncé mathématique choisi par l'examinateur dans la liste fournie ci-après, et par la résolution d'une EDO d'ordre 1 ou d'une EDO d'ordre 2 à coefficients constants (programme de PTSI).

La colle se poursuivra par la résolution d'un ou plusieurs exercices fournis par l'examinateur dans le cadre des exigibles.

Notation La connaissance du cours et l'étude détermine la fourchette dans laquelle sera évalué l'étudiant :

- énoncé su et résolution correcte : note minimale de 11/20;
- énoncé non su et résolution incorrecte : note maximale de 7/20;
- autre situation : note comprise entre 8 et 14.

Les colleurs sont libres d'utiliser toutes les notes allant de 0 à 20 dans le respect des contraintes ci-dessus.

Énoncés

Équations différentielles

EDH d'ordre 1. Soit I un intervalle, soit $a \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$ et soit A une primitive de a sur I . L'ensemble \mathcal{S}_h des solutions de $(E_h) : y' + a(t)y = 0$ sur I est donné par $\mathcal{S}_h = \text{Vect}_{\mathbb{K}}(y_h) = \{t \mapsto \lambda y_h(t) : \lambda \in \mathbb{K}\}$, où $y_h : t \mapsto e^{-A(t)}$.

EDO d'ordre 1. Soit I un intervalle et soient $a, b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$. L'ensemble \mathcal{S} des solutions de $(E) : y' + a(t)y = b(t)$ sur I est donné par $\mathcal{S} = \{t \mapsto y_p(t) + \lambda y_h(t) : \lambda \in \mathbb{K}\}$ où y_p est une solution particulière de (E) et y_h une solution non nulle de l'EDH associée.

Thm de Cauchy linéaire d'ordre 1. Soit I un intervalle et soient $a, b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$. Soit $(t_0, y_0) \in I \times \mathbb{K}$.

Le problème de Cauchy $\begin{cases} y' + a(t)y = b(t), \\ y(t_0) = y_0 \end{cases}$ possède une unique solution de classe \mathcal{C}^1 sur I .

Solutions réelles d'une EDH d'ordre 2 à coefficients constants. Soit $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ et soit $P(X) = X^2 + \alpha X + \beta$. L'ensemble \mathcal{S}_h des solutions de $(E_h) : y'' + \alpha y' + \beta y = 0$ à valeurs réelles est donné par $\mathcal{S}_h = \text{Vect}_{\mathbb{R}}(y_1, y_2)$ où

- (i) $y_1 : t \mapsto e^{\lambda_1 t}$ et $y_2 : t \mapsto e^{\lambda_2 t}$, si P possède deux racines réelles distinctes λ_1 et λ_2 ;
- (ii) $y_1 : t \mapsto e^{\lambda_0 t}$ et $y_2 : t \mapsto t e^{\lambda_0 t}$, si P possède une racine réelle double λ_0 ;
- (iii) $y_1 : t \mapsto e^{at} \cos(bt)$ et $y_2 : t \mapsto e^{at} \sin(bt)$, si P possède deux racines complexes conjuguées $\lambda_{\pm} = a \pm ib$.

EDH d'ordre 2, cas général. Soit I un intervalle et soient $a, b \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$. L'ensemble \mathcal{S}_h des solutions de $(E_h) : y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$ sur I est un sev de $\mathcal{C}^2(I, \mathbb{K})$ de dimension 2.

EDO d'ordre 2, cas général. Soit I un intervalle et soient $a, b, c \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$. L'ensemble \mathcal{S} des solutions de $(E) : y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$ sur I est non vide et donné par $\mathcal{S} = \{t \mapsto y_p(t) + \lambda_1 y_1(t) + \lambda_2 y_2(t) : (\lambda_1, \lambda_2) \in \mathbb{K}^2\}$ où y_p est une solution particulière de (E) et (y_1, y_2) une base de solution de l'EDH associée.

Thm de Cauchy linéaire d'ordre 2. Soit I un intervalle et soient $a, b, c \in \mathcal{C}^0(I, \mathbb{K})$. Soit $(t_0, y_0, v_0) \in I \times \mathbb{K}^2$.

Le problème de Cauchy $\begin{cases} y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t), \\ y(t_0) = y_0; y'(t_0) = v_0 \end{cases}$ possède une unique solution de classe \mathcal{C}^2 sur I .

Fonctions de plusieurs variables

Partie ouverte. Une partie Ω de \mathbb{R}^p est dite ouverte si elle est vide ou bien si : $\forall M \in \Omega, \exists \varepsilon > 0, B_\varepsilon(M, \varepsilon) \subset \Omega$.
Si $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$, alors $\{M \in \mathbb{R}^p : f(M) > 0\}$ et $\{M \in \mathbb{R}^p : f(M) < 0\}$ sont des parties ouverte de \mathbb{R}^p .

Partie fermée. Une partie Ω de \mathbb{R}^p est dite fermée si son complémentaire est ouvert.
Si $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^p, \mathbb{R})$, alors $\{M \in \mathbb{R}^p : f(M) = 0\}$, $\{M \in \mathbb{R}^p : f(M) \geq 0\}$ et $\{M \in \mathbb{R}^p : f(M) \leq 0\}$ sont des parties fermées de \mathbb{R}^p .

Partie bornée. Une partie Ω de \mathbb{R}^p est dite bornée si : $\exists r > 0, \forall M \in \Omega, d(O, M) \leq r$.

Fonctions polynomiales. Une fonction sur \mathbb{R}^p est dite polynomiale si elle s'écrit comme une combinaison linéaire de fonctions de la forme $(x_1, \dots, x_p) \mapsto x_1^{n_1} \cdots x_p^{n_p}$, où $(n_1, \dots, n_p) \in \mathbb{N}^p$.

Continuité. On dit que $f : \Omega \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ est continue en $M_0 \in \Omega$ si f admet pour limite $f(M_0)$ en M_0 , autrement dit si : $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, \forall M \in \Omega, d(M, M_0) < \eta \Rightarrow d(f(M), f(M_0)) < \varepsilon$.

Dérivée directionnelle selon un vecteur. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ ouvert, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $M_0 \in \Omega$ et $\vec{u} \in \mathbb{R}^p$ non nul. On dit que f admet une dérivée partielle en M_0 selon \vec{u} si la fonction $\varphi : t \mapsto f(M_0 + t\vec{u})$ est dérivable en 0. Dans ce cas, on pose : $D_{\vec{u}} f(M_0) = \varphi'(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(M_0 + t\vec{u}) - f(M_0)}{t}$.

Dérivées partielles d'ordre 1. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ ouvert, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ et $M_0 \in \Omega$. Si f admet une dérivée directionnelle en M_0 selon \vec{e}_k , on pose :

$$\partial_k(f)(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(M_0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(M_0 + t\vec{e}_k) - f(M_0)}{t}.$$

Classe \mathcal{C}^1 et vecteur gradient. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ ouvert et $f : \Omega \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est de classe \mathcal{C}^1 si elle admet des dérivées partielles d'ordre 1, et que chacune d'entre elles est continue sur Ω . On appelle alors vecteur gradient de f en M_0 le vecteur noté $\vec{\nabla} f(M_0)$ défini par

$$\vec{\nabla} f(M_0) = \sum_{k=1}^p \partial_k(f)(M_0) \vec{e}_k = \sum_{k=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_k}(M_0) \vec{e}_k.$$

Taylor-Young à l'ordre 1. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ ouvert, $f : \Omega \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 et $M_0 \in \Omega$. Alors, pour tout M proche de M_0 :

$$f(M) = f(M_0) + \left\langle \vec{\nabla} f(M_0) \mid \overrightarrow{M_0 M} \right\rangle + o_{M \rightarrow M_0}(M_0 M).$$

Pour une fonction de deux variables, ceci se réécrit :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) = f(x_0, y_0) + h \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + k \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + o_{(h,k) \rightarrow (0,0)} \left(\sqrt{h^2 + k^2} \right).$$

Interprétation géométrique du gradient. Soit Γ la courbe plane d'équation cartésienne $f(x, y) = 0$ et soit $M_0(x_0, y_0)$ un point régulier de Γ . Alors le vecteur $\vec{\nabla} f(M_0)$ est normal à Γ en M_0 et une équation de la tangente à Γ en M_0 est donnée par :

$$\partial_1(f)(M_0) \cdot (x - x_0) + \partial_2(f)(M_0) \cdot (y - y_0) = 0.$$

Classe \mathcal{C}^2 et matrice hessienne. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ ouvert et $f : \Omega \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$. On dit que f est de classe \mathcal{C}^2 si elle admet des dérivées partielles d'ordre 2, et que chacune d'entre elles est continue sur Ω . On appelle alors matrice hessienne de f en $M_0 \in \Omega$ la matrice $\mathbb{H}_f(M_0) = (\partial_{i,j}(f)(M_0))_{1 \leq i, j \leq p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$.

Par le théorème de Schwarz, cette matrice est symétrique réelle.

Taylor-Young à l'ordre 2. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ ouvert, $f : \Omega \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 et $M_0 \in \Omega$. Notons \mathbb{H}_0 la matrice hessienne de f en M_0 . Alors, pour tout M proche de M_0 :

$$f(M) = f(M_0) + \left\langle \vec{\nabla} f(M_0) \mid \overrightarrow{M_0 M} \right\rangle + \frac{1}{2} \left\langle \mathbb{H}_0 \cdot \overrightarrow{M_0 M} \mid \overrightarrow{M_0 M} \right\rangle + o_{M \rightarrow M_0}(M_0 M^2).$$

CN d'extremum local. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ ouvert et $f : \Omega \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^1 . Si la fonction f admet un extremum local en M_0 , alors M_0 est un point critique de f , i.e. $\vec{\nabla} f(M_0) = \vec{0}$.

Nature d'un point critique. Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ ouvert, $f : \Omega \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$ de classe \mathcal{C}^2 et soit M_0 un point critique de f . Notons \mathbb{H}_0 la matrice hessienne de f en M_0 .

- Si les vp de \mathbb{H}_0 sont strictement positives, alors f admet un minimum local en M_0 . C'est le cas si $\det(\mathbb{H}_0) > 0$ et $\text{tr}(\mathbb{H}_0) > 0$.
- Si les vp de \mathbb{H}_0 sont strictement négatives, alors f admet un maximum local en M_0 . C'est le cas si $\det(\mathbb{H}_0) > 0$ et $\text{tr}(\mathbb{H}_0) < 0$.
- Si les vp de \mathbb{H}_0 sont non nulles et de signes opposés, alors f admet un point selle en M_0 . C'est le cas si $\det(\mathbb{H}_0) < 0$.
- Si au moins une des valeurs propres de \mathbb{H}_0 est nulle, on ne peut rien conclure quant à la nature de M_0 . C'est le cas si $\det(\mathbb{H}_0) = 0$.

Liste des exigibles

- savoir résoudre une EDL d'ordre 1 homogène;
- savoir trouver une solution particulière d'une EDL d'ordre 1 via la méthode de variation de la constante;
- savoir résoudre une EDL d'ordre 2 homogène à coefficients constants;
- savoir trouver une solution particulière d'une EDL d'ordre 2 à coefficients constants quand le second membre est une exponentielle;
- savoir résoudre une EDL d'ordre 2 à coefficients non constants quand on connaît une solution de l'équation homogène;
- savoir rechercher une solution d'une EDL d'ordre 2 à coefficients non constants sous forme polynomiale ou bien développable en série entière;
- savoir calculer des dérivées partielles;
- connaître l'interprétation géométrique du gradient;
- savoir déterminer l'équation d'une tangente pour une courbe définie de manière implicite;
- savoir déterminer les extrema locaux d'une fonction;
- savoir étudier les extrema d'une fonction sur une partie fermée et bornée.