Semaine 17 (10/02–14/02) : géométrie affine du plan ; courbes paramétrées

Consignes. La colle débute par la restitution écrite d'énoncés mathématiques choisis par l'examinateur dans la liste fournie ci-après. Cette restitution n'excèdera pas 6 minutes sinon les énoncés manquants seront considérés comme non sus. Pour cette semaine :

— Un énoncé pioché dans « bases de géométrie affine ».

— Un énoncé pioché dans « coniques »(dessin inclus le cas échéant).

— Un paramétrage parmi droite, cercle, ellipse, hyperbole, parabole, graphe d'une fonction.

— Un autre énoncé pioché dans « courbes paramétrées ».

La colle se poursuivra par la résolution d'un ou plusieurs exercices fournis par l'examinateur dans le cadre des exigibles et du programme détaillé dans la suite.

Notation. La connaissance du cours détermine la fourchette dans laquelle sera évalué l'étudiant :

— 4 énoncés sus : note minimale de 9/20 ;

— 1 énoncé erroné ou non su : note maximale de 13/20 ;

— 2 énoncés erronés ou non sus : note maximale de 9/20 ;

— 3 énoncés erronés ou non sus : note maximale de 6/20.

Les colleurs sont libres d'utiliser toutes les notes allant de 0 à 20 dans le respect des contraintes ci-dessus.

Énoncés

Bases de géométrie affine du plan

Équations de droite. Si $\mathscr{D}$ est la droite affine passant par $A(x_A, y_A)$ et :

— dirigée par $\overrightarrow{\tau} = \binom{\tau_x}{\tau_y}$, alors $M \in \mathscr{D}$ ssi $[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{\tau}] = 0$ ssi $\tau_y(x - x_A) - \tau_x(y - y_A) = 0$;

— de vecteur normal $\overrightarrow{n} = \binom{n_x}{n_y}$, alors $M \in \mathscr{D}$ ssi $\langle \overrightarrow{AM} | \overrightarrow{n} \rangle = 0$ ssi $n_x(x - x_A) + n_y(y - y_A) = 0$.

Équations de cercle. Le cercle de centre $\Omega(x_\Omega, y_\Omega)$ et de rayon $r \geqslant 0$ a pour équation $(x - x_\Omega)^2 + (y - y_\Omega)^2 = r^2$.

Distance d'un point à une droite. Si $\mathscr{D}$ est une droite du plan affine

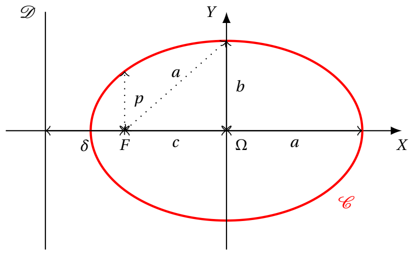
— passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$, $d(M, \mathscr{D}) = \frac{|\langle \overrightarrow{AM} | \overrightarrow{n} \rangle|}{\| \overrightarrow{n} \|}$;

— passant par A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$, $d(M, \mathscr{D}) = \frac{|[\overrightarrow{AM} | \overrightarrow{u}]|}{\| \overrightarrow{u} \|}$;

— d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$, $d(M, \mathscr{D}) = \frac{|ax_M + bx_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

Coniques

Définition d'une conique par foyer, directrice et excentricité. On appelle conique $\mathscr{C}$ de foyer F, de directrice $\mathscr{D}$ et d'excentricité e, l'ensemble des points M du plan vérifiant $MF = e \cdot MH$, où H est le projeté orthogonal de M sur $\mathscr{D}$.

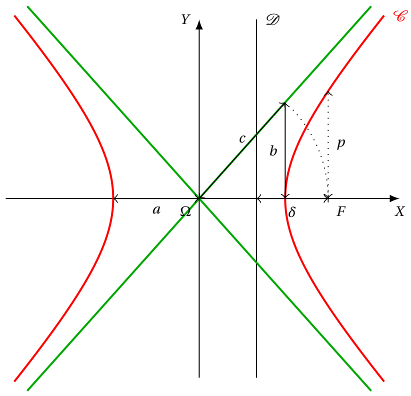


Équation cartésienne d'une ellipse. Une ellipse $\mathscr{E}$ est une conique d'excentricité $e<1$. Dans un repère orthonormé adapté $\mathscr{R}_a=(\Omega;\overrightarrow{I};\overrightarrow{J})$, où $\overrightarrow{I}$ dirige l'axe focal, une équation cartésienne de $\mathscr{E}$ est de la forme $\frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1$, où $a>b>0$. On appelle alors :

— centre de l'ellipse le point Ω (qui appartient à l'axe focal et constitue un centre de symétrie pour $\mathscr{C}$) ;

— grand axe la droite (ΩX) (en fait l'axe focal) et grand rayon la quantité a ;

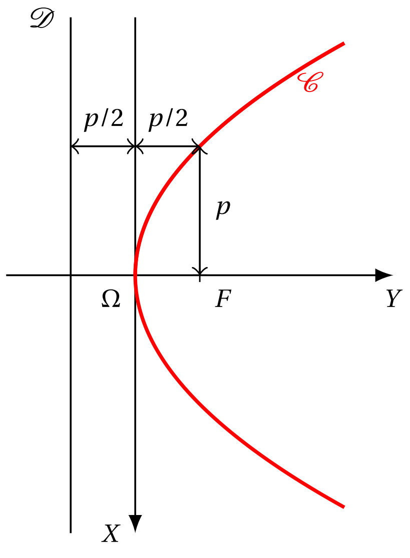
— petit axe la droite (ΩY) (qui est un autre axe de symétrie de l'ellipse) et petit rayon la quantité b.



Équation cartésienne d'une hyperbole. Une hyperbole $\mathscr{H}$ est une conique d'excentricité $e>1$. Dans un repère orthonormé adapté $\mathscr{R}_a=(\Omega;\overrightarrow{I};\overrightarrow{J})$, où $\overrightarrow{I}$ dirige l'axe focal, une équation cartésienne de $\mathscr{H}$ est de la forme $\frac{X^2}{a^2}-\frac{Y^2}{b^2}=1$, où $a,b>0$. On appelle :

— centre de l'hyperbole le point Ω (qui appartient à l'axe focal et constitue un centre de symétrie pour $\mathscr{C}$) ;

— asymptotes les deux droites affines d'équations $\frac{X}{a}-\frac{Y}{b}=0$ et $\frac{X}{a}+\frac{Y}{b}=0$.



Équation cartésienne d'une parabole. Une parabole $\mathscr{C}$ est une conique d'excentricité $e=1$. Dans un repère orthonormé adapté $(\Omega;\overrightarrow{I};\overrightarrow{J})$, où $\overrightarrow{J}$ dirige l'axe focal, une équation cartésienne de $\mathscr{C}$ est de la forme $2pY=X^2$.

Classification des coniques. Soit $\mathscr{C}$ une conique d'équation $ax^2+2bxy+cy^2+dx+ey+f=0$ avec $(a,b,c)\neq(0,0,0)$. On note $A=\left(\begin{smallmatrix}a&b\\b&c\end{smallmatrix}\right)$ la matrice associée à $q:(x,y)\mapsto ax^2+2bxy+cy^2$.

— Si $A\in\mathrm{Vect}(I_2)$, $\mathscr{C}$ est de type cercle ;

— si $A\notin\mathrm{Vect}(I_2)$ et $\det(A)>0$, $\mathscr{C}$ est de type ellipse ;

— si $A\notin\mathrm{Vect}(I_2)$ et $\det(A)<0$, $\mathscr{C}$ est de type hyperbole ;

— si $A\notin\mathrm{Vect}(I_2)$ et $\det(A)=0$, $\mathscr{C}$ est de type parabole.

Paramétrages à connaître

Paramétrage d'une droite. Une représentation paramétrique de la droite passant par $A(x_A, y_A)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u} = \binom{u_x}{u_y}$ est donnée par

$$\begin{cases} x(t) = x_A + tu_x, \\ y(t) = y_A + tu_y, \end{cases} t \in \mathbb{R}.$$

Paramétrage d'un cercle. Une représentation paramétrique du cercle de centre $\Omega(x_\Omega, y_\Omega)$ et de rayon $r > 0$ est donnée par

$$\begin{cases} x(t) = x_\Omega + r\cos t, \\ y(t) = y_\Omega + r\sin t, \end{cases} t \in \mathbb{R}.$$

Paramétrage d'une ellipse. Une représentation paramétrique de l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est donnée par

$$\begin{cases} x(t) = a\cos t, \\ y(t) = b\sin t, \end{cases} t \in \mathbb{R}.$$

Paramétrage d'une branche d'hyperbole. Une représentation paramétrique de la branche de l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ située dans le demi-plan $x \geqslant 0$ est donnée par

$$\begin{cases} x(t) = a\,\mathrm{ch}\,t, \\ y(t) = b\,\mathrm{sh}\,t, \end{cases} t \in \mathbb{R}$$

Paramétrage d'une parabole. Une représentation paramétrique de la parabole d'équation $2py = x^2$ est donnée par

$$\begin{cases} x(t) = t, \\ y(t) = \dfrac{t^2}{2p}, \end{cases} t \in \mathbb{R}$$

Paramétrage du graphe d'une fonction. Une représentation paramétrique du graphe de la fonction φ définie sur I est donnée par

$$\begin{cases} x(t) = t, \\ y(t) = \varphi(t), \end{cases} t \in \mathbb{R}$$

Courbes paramétrées

Tangente. Γ possède une tangente $\mathscr{T}_0$ au point $M(t_0)$ si la pente $p(t) = \frac{y(t)-y(t_0)}{x(t)-x(t_0)}$ de la sécante $(M(t_0)M(t))$ admet une limite finie, ou si $1/p(t)$ tend vers 0, quand $t \to t_0$.

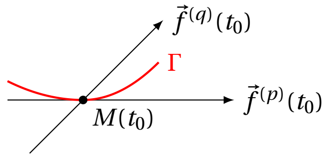
- Si $p(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} \lambda \in \mathbb{R}$, $\mathscr{T}_0$ a pour pente λ.
- Si $1/p(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} 0$, $\mathscr{T}_0$ est « verticale ».

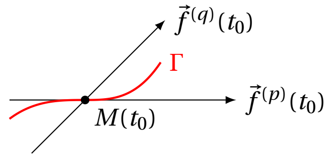
Point régulier. On dit que le point $M(t_0) \in \Gamma$ paramétrée par $(I, \overrightarrow{f})$ est régulier si le vecteur $\overrightarrow{f}'(t_0)$ est non nul. Dans ce cas, Γ possède une tangente en $M(t_0)$ dirigée par $\overrightarrow{f}'(t_0)$.

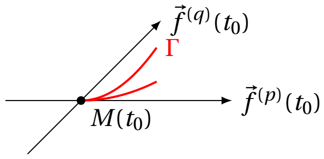
Étude locale. On suppose que les entiers suivants sont bien définis :

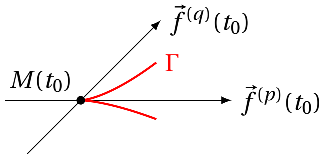
$$p = \min\left\{k \in \mathbb{N}^* : \overrightarrow{f}^{(k)}(t_0) \neq \overrightarrow{0}\right\} \quad \text{et} \quad q = \min\left\{k > p : \left(\overrightarrow{f}^{(p)}(t_0), \overrightarrow{f}^{(k)}(t_0)\right) \text{ libre}\right\}.$$

Il vient la classification suivante.

<table>
<tr><th></th><th>q pair</th><th>q impair</th></tr>
<tr><td>p impair</td><td>

point ordinaire</td><td>

point d'inflexion</td></tr>
<tr><td>p pair</td><td>

point de rebroussement de 2^e espèce</td><td>

point de rebroussement de 1^{re} espèce</td></tr>
</table>

Point birégulier. On dit que le point $M(t_0) \in \Gamma$ paramétrée par $(I, \vec{f})$ est birégulier si la famille $\left(\vec{f}'(t_0), \vec{f}''(t_0)\right)$ est libre.

Asymptote. On dit que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $ax + by + c = 0$ est asymptote à Γ paramétrée par $(I, \vec{f})$ au voisinage de $t_0 \in \bar{I}$ si $\|\vec{f}(t)\| \xrightarrow[t\to t_0]{} +\infty$ et si $ax(t) + by(t) + c \xrightarrow[t\to t_0]{} 0$.

Programme détaillé

Liste des exigibles

- savoir déterminer l'équation cartésienne d'une droite ou d'un cercle du plan;
- savoir déterminer un vecteur directeur ou un vecteur normal à une droite;
- connaître la définition d'une conique par foyer, directrice et excentricité;
- savoir obtenir l'équation cartésienne d'une conique;
- savoir réduire une équation de degré 2 et tracer la conique associée.
- connaître le vocabulaire lié aux courbes paramétrées planes;
- savoir réduire le domaine d'étude d'une courbe paramétrée;
- savoir tracer un tableau de variations conjoint;
- savoir étudier une branche infinie;
- savoir étudier localement un point régulier ou stationnaire;
- savoir tracer l'allure d'une courbe paramétrée.

Ch. 11 : géométrie affine du plan

I) Quelques notions de base

1) Une très brève introduction au plan affine $\mathscr{P}$

2) Droites affines et parallélisme

- On dit que $\mathscr{D} \subset \mathscr{P}$ est une droite affine s'il existe $A \in \mathscr{D}$ tel que $\Delta = \{\overrightarrow{AM} \,:\, M \in \mathscr{D}\}$ forme une droite vectorielle.
- Si $\mathscr{D}$ est une droite affine, Δ est unique, indépendante du point A, et est appelée la direction de $\mathscr{D}$.
- Deux droites affines $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont dites parallèles si elles possèdent la même direction.
- Si $\mathscr{D}$ est une droite affine, on dit que $\vec{\tau}$ dirige $\mathscr{D}$ si $\vec{\tau}$ dirige Δ.
- Équation cartésienne d'une droite dont on connaît un point et un vecteur directeur.

3) Structure euclidienne

- Si $\mathscr{D}$ est une droite affine, on dit que $\overrightarrow{n}$ est normal à $\mathscr{D}$ si $\overrightarrow{n}$ dirige $\Delta^{\perp}$.
- Équation cartésienne d'une droite dont on connaît un point et un vecteur normal.
- Deux droites affines $\mathscr{D}$ et $\mathscr{D}'$ sont dites perpendiculaires si leurs direction sont orthogonales.
- La distance d'un point M à une droite affine $\mathscr{D}$ passant par A et de vecteur normal $\overrightarrow{n}$ est donnée par $d(M,\mathscr{D}) = \frac{|\langle \overrightarrow{AM} | \overrightarrow{n} \rangle|}{\|\overrightarrow{n}\|}$.
- Si $\mathscr{D}$ a pour équation cartésienne $ax+by+c=0$, $d(M,\mathscr{D}) = \frac{|ax_M+bx_M+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$.
- On appelle cercle de centre A et de rayon $r \geqslant 0$ l'ensemble des points M du plan situés à distance r de A : $\mathscr{C}(A,r) = \{M \in \mathscr{P} : AM = r\}$.
- $\mathscr{C}(A,r)$ a pour équation cartésienne $(x-x_A)^2 + (y-y_A)^2 = r^2$.

4) Changement de repère

- Formules de changement de repères

II) Coniques

1) Définition par foyer, directrice et excentricité

- On appelle conique $\mathscr{C}$ de foyer F, de directrice $\mathscr{D}$ et d'excentricité e, l'ensemble $\mathscr{C} = \{M \in \mathscr{P} : MF = e \cdot d(M,\mathscr{D})\}$.
- On appelle axe focal de la conique $\mathscr{C}$ la droite perpendiculaire à $\mathscr{D}$ passant par F, et sommets les points d'intersection de $\mathscr{C}$ avec l'axe focal. Enfin :
  - — si $e<1$, on dit que $\mathscr{C}$ est une ellipse ;
  - — si $e=1$, on dit que $\mathscr{C}$ est une parabole ;
  - — si $e>1$, on dit que $\mathscr{C}$ est une hyperbole.
- Équation cartésienne d'une ellipse dans un repère orthonormé adapté : $\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = 1$. Centre, grand axe/rayon, petit axe/rayon.
- Équation cartésienne d'une hyperbole dans un repère orthonormé adapté : $\frac{X^2}{a^2} - \frac{Y^2}{b^2} = 1$. Centre, asymptotes.
- Équation cartésienne d'une parabole dans un repère orthonormé adapté : $2pY = X^2$.

2) Définition d'une conique via une équation de degré 2

- On appelle conique toute courbe $\mathscr{C}$ de $\mathscr{P}$ dont l'équation cartésienne dans le repère $\mathscr{R} = (O; \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ est donnée par $Ax^2+2Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ avec $(A,B,C) \neq (0,0,0)$.
- On note $\Gamma = \begin{pmatrix} A & B \\ B & C \end{pmatrix}$. Alors
  - — si $\det(\Gamma) > 0$, $\mathscr{C}$ est soit une ellipse, soit une droite, soit vide ;
  - — si $\det(\Gamma) < 0$, $\mathscr{C}$ est soit une hyperbole, soit la réunion de deux droites sécantes ;
  - — si $\det(\Gamma) = 0$, $\mathscr{C}$ est soit une parabole, soit la réunion de deux droites parallèles, soit une droite, soit vide ;
- Équations réduites dans un repère adapté.
- Tracé de coniques.

Ch. 12 : courbes paramétrées

I) Courbes paramétrées planes

1) Définition

- On appelle courbe paramétrée plane de classe $\mathscr{C}^k$ tout couple $(I,\vec{f})$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$ et $\vec{f} : t \mapsto (x(t),y(t))$ une fonction vectorielle de classe $\mathscr{C}^k$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.
- Support : $\Gamma = \vec{f}(I) = \left\{(x(t),y(t)) : t \in I\right\}$.

2) Symétries et périodicité

- Réduction du domaine d'étude et transformations géométriques associées

3) Variations des coordonnées

- Tableau de variations conjoint.

4) Branches infinies

- Γ possède une branche infinie au voisinage de t_0 si $\|\vec{f}(t)\| \xrightarrow[t\to t_0]{} +\infty$.
- $\mathscr{D}$ d'équation $ax+by+c=0$ est asymptote à Γ au voisinage de t_0 si $\|\overrightarrow{f}(t)\| \xrightarrow[t\to t_0]{} +\infty$ et si $ax(t)+by(t)+c \xrightarrow[t\to t_0]{} 0$.
- Branche paraboliques.

5) Tangente

- On dit que Γ possède une tangente au point $M(t_0)$ si la pente $p(t) = \frac{y(t)-y(t_0)}{x(t)-x(t_0)}$ de la sécante $(M(t_0)M(t))$, ou son inverse $\frac{1}{p(t)}$, admet une limite finie quand $t \to t_0$.
- $M(t_0)$ est régulier si $\vec{f}'(t_0) \neq \vec{0}$, et stationnaire (ou singulier) sinon.
- Si $M(t_0)$ est régulier alors Γ possède une tangente en ce point dirigée par le vecteur $\overrightarrow{f}'(t_0)$.

6) Étude locale en un point

- $p = \min\left\{k \in \mathbb{N}^* : \vec{f}^{(k)}(t_0) \neq 0\right\}$ et $q = \min\left\{k > p : \left(\vec{f}^{(p)}(t_0), \vec{f}^{(k)}(t_0)\right) \text{ libre}\right\}$ (sous réserve d'existence)
- La courbe Γ possède une tangente en $M(t_0)$ dirigée par le vecteur $\vec{f}^{(p)}(t_0)$.
- Point ordinaire, point d'inflexion, points de rebroussement.