Semaine 18 (17/02–21/02) : géométrie affine du plan; courbes paramétrées

Consignes. La colle débute par la restitution écrite d'énoncés mathématiques choisis par l'examinateur dans la liste fournie ci-après. Cette restitution n'excèdera pas 6 minutes sinon les énoncés manquants seront considérés comme non sus. Pour cette semaine :

- Un paramétrage parmi droite, cercle, ellipse, hyperbole, parabole, graphe d'une fonction.
- Un énoncé pioché dans « courbes paramétrées ».
- Un énoncé pioché dans « propriétés métriques ».

La colle se poursuivra par la résolution d'un ou plusieurs exercices fournis par l'examinateur dans le cadre des exigibles et du programme détaillé dans la suite.

Notation. La connaissance du cours détermine la fourchette dans laquelle sera évalué l'étudiant :

- 3 énoncés sus : note minimale de 9/20;
- 1 énoncé erroné ou non su : note maximale de 13/20;
- 2 énoncés erronés ou non sus : note maximale de 9/20;
- 3 énoncés erronés ou non sus : note maximale de 6/20.

Les colleurs sont libres d'utiliser toutes les notes allant de 0 à 20 dans le respect des contraintes ci-dessus.

Énoncés

Paramétrages à connaître

Paramétrage d'une droite. Une représentation paramétrique de la droite passant par $A(x_A, y_A)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{u} = \binom{u_x}{u_y}$ est donnée par

$$\begin{cases} x(t) = x_A + t u_x, \\ y(t) = y_A + t u_y, \end{cases} t \in \mathbb{R}.$$

Paramétrage d'un cercle. Une représentation paramétrique du cercle de centre $\Omega(x_\Omega, y_\Omega)$ et de rayon $r > 0$ est donnée par

$$\begin{cases} x(t) = x_\Omega + r\cos t, \\ y(t) = y_\Omega + r\sin t, \end{cases} t \in \mathbb{R}.$$

Paramétrage d'une ellipse. Une représentation paramétrique de l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est donnée par

$$\begin{cases} x(t) = a\cos t, \\ y(t) = b\sin t, \end{cases} t \in \mathbb{R}.$$

Paramétrage d'une branche d'hyperbole. Une représentation paramétrique de la branche de l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ située dans le demi-plan $x \geqslant 0$ est donnée par

$$\begin{cases} x(t) = a\,\mathrm{ch}\,t, \\ y(t) = b\,\mathrm{sh}\,t, \end{cases} t \in \mathbb{R}$$

Paramétrage d'une parabole. Une représentation paramétrique de la parabole d'équation $2py = x^2$ est donnée par

$$\begin{cases} x(t) = t, \\ y(t) = \dfrac{t^2}{2p}, \end{cases} t \in \mathbb{R}$$

Paramétrage du graphe d'une fonction. Une représentation paramétrique du graphe de la fonction φ définie sur I est donnée par

$$\begin{cases} x(t) = t, \\ y(t) = \varphi(t), \end{cases} t \in \mathbb{R}$$

Courbes paramétrées

Tangente. Γ possède une tangente $\mathscr{T}_0$ au point $M(t_0)$ si la pente $p(t) = \frac{y(t)-y(t_0)}{x(t)-x(t_0)}$ de la sécante $(M(t_0)M(t))$ admet une limite finie, ou si $1/p(t)$ tend vers 0, quand $t \to t_0$.

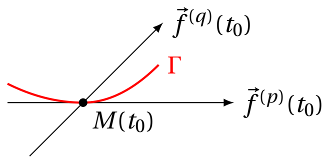
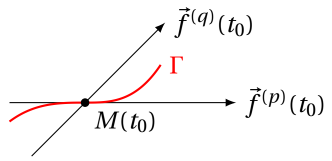
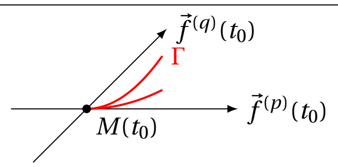
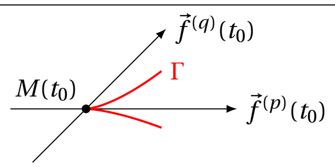
- Si $p(t) \xrightarrow[t\to t_0]{} \lambda \in \mathbb{R}$, $\mathscr{T}_0$ a pour pente λ.
- Si $1/p(t) \xrightarrow[t\to t_0]{} 0$, $\mathscr{T}_0$ est « verticale ».

Point régulier. On dit que le point $M(t_0) \in \Gamma$ paramétrée par $(I, \vec{f})$ est régulier si le vecteur $\vec{f}'(t_0)$ est non nul. Dans ce cas, Γ possède une tangente en $M(t_0)$ dirigée par $\vec{f}'(t_0)$.

Étude locale. On suppose que les entiers suivants sont bien définis :

$$p = \min\left\{k \in \mathbb{N}^* : \vec{f}^{(k)}(t_0) \neq \vec{0}\right\} \quad \text{et} \quad q = \min\left\{k > p : \left(\vec{f}^{(p)}(t_0), \vec{f}^{(k)}(t_0)\right) \text{ libre}\right\}.$$

Il vient la classification suivante.

	q pair	q impair
p impair	 *point ordinaire*	 *point d'inflexion*
p pair	 *point de rebroussement de 2e espèce*	 *point de rebroussement de 1re espèce*

Point birégulier. On dit que le point $M(t_0) \in \Gamma$ paramétrée par $(I, \vec{f})$ est birégulier si la famille $\left(\vec{f}'(t_0), \vec{f}''(t_0)\right)$ est libre.

Asymptote. On dit que la droite $\mathscr{D}$ d'équation $ax + by + c = 0$ est asymptote à Γ paramétrée par $(I, \vec{f})$ au voisinage de $t_0 \in \bar{I}$ si $\|\vec{f}(t)\| \xrightarrow[t\to t_0]{} +\infty$ et si $ax(t) + by(t) + c \xrightarrow[t\to t_0]{} 0$.

Propriétés métriques

Longueur d'arc. Pour une courbe Γ régulière de classe $\mathscr{C}^1$ de représentation paramétrique $(I, \vec{f})$, $\widehat{M(a)M(b)} = \int_a^b \|\vec{f}'(t)\| \mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} \mathrm{d}t$.

Abscisse curviligne. Soit Γ une courbe régulière de classe $\mathscr{C}^1$ de représentation paramétrique $(I, \overrightarrow{f})$.
On appelle abscisse curviligne à partir du point $M(t_0)$ la fonction s_{t_0} définie sur I par

$$\forall t \in I, \quad s_{t_0}(t) = \int_{t_0}^{t} \left\| \overrightarrow{f}'(u) \right\| \mathrm{d}u = \overset{\frown}{M(t_0)M(t)}.$$

Paramétrisation normale. Une paramétrisation $(I, \overrightarrow{f})$ d'une courbe Γ est dite normale (ou par abscisse curviligne) si pour tout $[t_1, t_2] \subset I$, $\overset{\frown}{M(t_1)M(t_2)} = t_2 - t_1$. C'est le cas si, et seulement si, $\forall t \in I, \|\overrightarrow{f}'(t)\| = 1$.

Courbure et formules de Frenet. Soit Γ une courbe régulière de classe $\mathscr{C}^2$ paramétrée par abscisse curviligne. On appelle courbure la fonction γ vérifiant $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{T}}{\mathrm{d}s} = \gamma \overrightarrow{N}$ et $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{N}}{\mathrm{d}s} = -\gamma \overrightarrow{T}$.

Relèvement et courbure. Soit Γ une courbe régulière de classe $\mathscr{C}^2$. Un relèvement de $\overrightarrow{T}$ est une fonction α de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant $\overrightarrow{T} = \cos(\alpha)\overrightarrow{i} + \sin(\alpha)\overrightarrow{j}$. Une telle fonction existe toujours et permet d'obtenir la courbure via la relation $\gamma = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}$.

Centre, rayon et cercle de courbure. Soit Γ une courbe birégulière de classe $\mathscr{C}^2$. On appelle rayon de courbure au point $M(t)$ le réel $R(t) = 1/\gamma(t)$; centre de courbure le point $C(t)$ vérifiant $\overrightarrow{M(t)C(t)} = R(t)\overrightarrow{N(t)}$ et cercle de courbure le cercle de centre $C(t)$ et de rayon $[C(t)M(t)]$.

Enveloppe. Une courbe Γ est l'enveloppe d'une famille de droites $(\mathscr{D}_t)_{t \in I}$ si

- chaque droite $\mathscr{D}_t$ est tangente à Γ ;
- pour tout $M \in \Gamma$, il existe $t \in I$ tel que $\mathscr{D}_t$ soit tangente à Γ au point M.

Développée. Soit Γ une courbe birégulière de classe $\mathscr{C}^2$. On appelle développée de Γ la courbe constituée de l'ensemble de ses centres de courbures. C'est également l'enveloppe des normales à Γ.

Programme détaillé

Liste des exigibles

- savoir déterminer l'équation cartésienne d'une droite ou d'un cercle du plan ;
- savoir déterminer un vecteur directeur ou un vecteur normal à une droite ;
- connaître la définition d'une conique par foyer, directrice et excentricité ;
- savoir obtenir l'équation cartésienne d'une conique ;
- savoir réduire une équation de degré 2 et tracer la conique associée.
- connaître le vocabulaire lié aux courbes paramétrées planes ;
- savoir réduire le domaine d'étude d'une courbe paramétrée ;
- savoir tracer un tableau de variations conjoint ;
- savoir étudier une branche infinie ;
- savoir étudier localement un point régulier ou stationnaire ;
- savoir tracer l'allure d'une courbe paramétrée ;
- savoir calculer une longueur d'arc ;
- connaître la définition d'une abscisse curviligne, du repère de Frenet et de la courbure ;
- savoir paramétrer l'enveloppe d'une famille de droites ;
- savoir paramétrer la développée d'une courbe.

Ch. 11 : géométrie affine du plan

Voir programme programme n° 17

Ch. 12 : courbes paramétrées

I) Courbes paramétrées planes

Voir programme programme n° 17

II) Propriétés métriques d'une courbe paramétrée

1) Abscisse curviligne

- Longueur d'arc : $\widehat{M(a)M(b)} = \int_a^b \|\vec{f}'(t)\| \mathrm{d}t = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} \mathrm{d}t$.
- Une paramétrisation d'une courbe est dite normale si pour tout $[t_1, t_2] \subset I$, $\widehat{M(t_1)M(t_2)} = t_2 - t_1$.
- On appelle abscisse curviligne à partir du point $M(t_0)$ la fonction s_{t_0} définie par $s_{t_0}(t) = \int_{t_0}^t \left\| \vec{f}'(u) \right\| \mathrm{d}u$.
- Si l'on note $J = s_{t_0}(I)$, alors la fonction s_{t_0} réalise une bijection de I sur J, est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et sa réciproque est de classe $\mathscr{C}^1$ sur J.
- Toute courbe régulière de classe $\mathscr{C}^1$ possède un paramétrage normal dit paramétrage par abscisse curviligne.
- Une paramétrisation est normale ssi $\|\vec{f}'\| = 1$.

2) Repère de Frenet et courbure

- Repère de Frenet $\left(M(t); \overrightarrow{T(t)}, \overrightarrow{N(t)}\right)$
- Courbure : application continue $\gamma : I \to \mathbb{R}$ vérifiant $\forall s \in I, \vec{f}''(s) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\overrightarrow{T(s)} = \gamma(s)\overrightarrow{N(s)}$.
- Formules de Frenet : $\frac{\mathrm{d}\vec{T}}{\mathrm{d}s} = \gamma\vec{N}$ et $\frac{\mathrm{d}\vec{N}}{\mathrm{d}s} = -\gamma\vec{T}$.
- Rayon de coubure : $R(s) = \frac{1}{\gamma(s)}$;
- Centre de courbure : $\overrightarrow{M(s)C(s)} = R(s)\overrightarrow{N(s)}$;
- Cercle de courbure (ou cercle osculateur) : $\mathscr{C}\big(C(s), |R(s)|\big)$.
- Théorème de relèvement : il existe une fonction $\alpha : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant $\forall t \in I, \overrightarrow{T(t)} = \cos[\alpha(t)]\vec{\imath} + \sin[\alpha(t)]\vec{\jmath}$.
- $\gamma = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}s}$.

III) Enveloppe d'une famille de droite et développée

1) Enveloppe d'une famille de droite

- Une famille de droites $(\mathscr{D}_t)_{t \in I}$ admet la courbe plane Γ pour enveloppe si chaque droite $\mathscr{D}_t$ est tangente à Γ; pour tout point M de Γ, il existe $t \in I$ tel que $\mathscr{D}_t$ soit tangente à Γ au point M.
- Recherche d'une enveloppe.

2) Développée d'une courbe régulière

- On appelle développée de Γ la courbe constituée de l'ensemble de ses centres de courbures.
- La développée d'une courbe régulière est l'enveloppe des normales à la courbe.