Semaine 19 (10/03–14/03) : calcul différentiel

Consignes. La colle débute par la résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 du type $y' + a(t)y = b(t)$, ou bien par la résolution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants $y'' + ay' + by = c(t)$, où c est une exponentielle ou une CL d'exponentielles.

La colle se poursuivra par la résolution d'un ou plusieurs exercices fournis par l'examinateur dans le cadre des exigibles et du programme détaillé dans la suite.

Précision. L'étude de la continuité ou de la classe $\mathscr{C}^1$ d'une fonction de plusieurs variables en un point n'est pas un objectif du programme de PT.

Notation. La résolution de l'EDL détermine la fourchette dans laquelle sera évalué l'étudiant.

— EDL résolue en autonomie : note minimale de 12/20 ;

— EDH résolue en autonomie, solution particulière erronée : note maximale de 13/20 ;

— EDH non résolue en autonomie : note maximale de 06/20 ;

Les colleurs sont libres d'utiliser toutes les notes allant de 0 à 20 dans le respect des contraintes ci-dessus.

Programme détaillé

Liste des exigibles

— savoir résoudre une EDO d'ordre 1 ;

— savoir résoudre une EDO d'ordre 2 à coefficients constants avec second membre exponentielle ;

— connaître la méthode de Lagrange pour résoudre une EDO d'ordre 2 à coefficients continus ;

— savoir rechercher une solution polynomiale ou bien DSE d'une EDL d'ordre 1 ou 2 ;

— savoir calculer des dérivées partielles ;

— connaître l'interprétation géométrique du gradient ;

— savoir déterminer l'équation d'une tangente pour une courbe définie de manière implicite ;

— savoir déterminer les points critiques d'une fonction ;

— savoir étudier la nature d'un point critique ;

— savoir rechercher les extrema globaux d'une fonction sur une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$;

— savoir résoudre une équation aux dérivées partielles à l'aide d'un changement de variables fourni par l'énoncé.

I) Équations différentielles linéaires du 1er et 2e ordres

1) Équations différentielles linéaires du 1er ordre

2) Équations différentielles linéaires du 2e ordre à coefficients constants

3) Équations différentielles linéaire du 2e ordre à coefficients continus

- $\mathscr{S}_h = \{y \in \mathscr{C}^2(I, \mathbb{K}) : y'' + a(t)y' + b(t)y = 0\}$ est un sev de $\mathscr{C}^2(I, \mathbb{K})$ de dimension 2.
- L'ensemble des solutions $\mathscr{S} = \{y \in \mathscr{C}^2(I, \mathbb{K}) : y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)\}$ est non vide et de la forme $\mathscr{S} = y_p + \mathscr{S}_h = \left\{y_p + \lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 : \lambda \in \mathbb{K}\right\}$ où y_p est une solution particulière de $y'' + a(t)y' + b(t)y = c(t)$ et (y_1, y_2) une base de solutions de $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$.
- Théorème de Cauchy linéaire d'ordre 2
- Recherche de solution sous forme polynomiale.
- Recherche de solution développable en série entière.
- Résolution dans le cas où l'on connaît une solution de l'équation homogène ne s'annulant pas (méthode de Lagrange).

- Résolution par changement de variable.

II) Rudiments de topologie de $\mathbb{R}^p$

1) Boules

- Boules ouverte et fermée.
- Partie bornée.
- Toute boule est bornée.

2) Parties ouvertes et fermées

- Définition d'une partie ouverte.
- Une boule ouverte est un ouvert. Une boule fermée n'est pas un ouvert.
- Définition d'une partie fermée.
- Une boule fermée est un fermé. Une boule ouverte n'est pas un fermé.

3) Points intérieur, extérieur, adhérent ou frontière

- Définitions.

III) Fonctions numériques de plusieurs variables

1) Généralités

- Lignes de niveaux d'une fonction de deux variables.
- Graphe d'une fonction de deux variables.
- Fonctions polynomiales.

2) Limite et continuité d'une fonction de deux variables

- Limite de f en un point adhérent.
- Unicité de la limite.
- Continuité en un point, sur Ω.
- Toute fonction polynomiale est continue.
- CL, produit, quotient de fonctions continues.
- Soient $g : \Omega \subset \mathbb{R}^p \to I \subset \mathbb{R}$ et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ continues. Alors $f = \varphi \circ g$ est continue sur Ω.
- Toute fonction continue sur une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^p$ est bornée et atteint ses bornes.
- Soit f une fonction numérique continue sur $\mathbb{R}^p$. Alors :
  - l'ensemble $\{M \in \mathbb{R}^p : f(M) > 0\}$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^p$;
  - les ensembles $\{M \in \mathbb{R}^p : f(M) \geqslant 0\}$ et $\{M \in \mathbb{R}^p : f(M) = 0\}$ sont des parties fermées de $\mathbb{R}^p$.

3) Dérivées partielles ; classe $\mathscr{C}^1$

- On dit que $f : \Omega \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ admet une dérivée directionnelle en $M_0 \in \mathring{\Omega}$ selon $\vec{u} \neq \vec{0}$ si $\varphi : t \in \mathbb{R} \mapsto f(M_0 + t\vec{u})$ est dérivable en 0. Dans ce cas, $D_{\vec{u}} f(M_0) := \lim_{t\to 0} \frac{f(M_0+t\vec{u})-f(M_0)}{t}$.
- $\partial_k(f)(M_0) = \frac{\partial f}{\partial x_k}(M_0) := D_{\vec{e_k}} f(M_0)$.
- Classe $\mathscr{C}^1$.
- Toute fonction polynomiale est de classe $\mathscr{C}^1$.
- CL, produit, quotient de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$.
- Soient $g : \Omega \subset \mathbb{R}^p \to I \subset \mathbb{R}$ et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$. Alors $f = \varphi \circ g$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur Ω.

4) Vecteur gradient

- Pour $f \in \mathscr{C}^1(\Omega, \mathbb{R})$, $\vec{\nabla} f(M_0) = \sum_{k=1}^p \partial_k(f)(M_0)\vec{e_k}$.
- Formule de Taylor-Young à l'ordre 1.
- $D_{\vec{u}} f(M_0) = \left\langle \vec{\nabla} f(M_0) \middle| \vec{u} \right\rangle$.
- Dérivation de $f \circ \vec{\gamma}$ (règle de la chaîne).

5) Courbes du plan définies par une équation cartésienne

- Soit $\mathscr{C} = \{(x, y) \in \Omega : f(x, y) = 0\}$. On dit que $M_0 \in \mathscr{C}$ est régulier si $\vec{\nabla} f(M_0) \neq \vec{0}$.
- Soit $M_0 \in \mathscr{C}$ régulier. Alors $\vec{\nabla} f(M_0)$ est normal à $\mathscr{C}$ en M_0.

6) Calcul différentiel d'ordre 2 pour les fonctions numériques de deux variables

- $\partial_{i,j}(f) := \partial_i[\partial_j(f)]$.
- On dit que f est de classe $\mathscr{C}^2$ si elle admet des dérivées partielles d'ordre 1 et 2, et que chacune de ces dérivées partielles est continue.
- Toute fonction polynomiale est de classe $\mathscr{C}^2$.
- CL, produit, quotient de fonctions de classe $\mathscr{C}^2$.
- Soient $g : \Omega \subset \mathbb{R}^p \to I \subset \mathbb{R}$ et $\varphi : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$. Alors $f = \varphi \circ g$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur Ω.
- Théorème de Schwarz : si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^2$, alors $\partial_{i,j}(f) = \partial_{j,i}(f)$.
- Matrice hessienne de f en M_0 : $\mathbb{H}_f(M_0) = \left(\partial_{i,j}(f)(M_0)\right)_{1\leqslant i,j\leqslant p}$.
- Formule de Taylor-Young à l'ordre 2.

7) Extrema d'une fonction de deux variables réelles

- Point critique.
- CN d'extremum local. Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ouvert et soit $f \in \mathscr{C}^1(\Omega, R)$. Si f admet un extremum local en M_0, alors M_0 est un point critique de f, i.e. $\vec{\nabla} f(M_0) = \vec{0}$.
- Nature d'un point critique en fonction de la matrice hessienne.

IV) Fonctions de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}^n$.

- Pour les fonctions de deux variables, si l'on pose $\tilde{f} : t \mapsto f\big(x(u,v), y(u,v)\big)$ et $M_0 = (x(u_0,v_0), y(u_0,v_0))$, alors

$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial u}(u_0,v_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\cdot\frac{\partial x}{\partial u}(u_0,v_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\cdot\frac{\partial y}{\partial u}(u_0,v_0)$$
$$\frac{\partial \tilde{f}}{\partial v}(u_0,v_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(M_0)\cdot\frac{\partial x}{\partial v}(u_0,v_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(M_0)\cdot\frac{\partial y}{\partial v}(u_0,v_0)$$