Semaine 20 (16/03–20/03) : intégrales à paramètre

Consignes La colle débute avec la résolution d'une EDO d'ordre 1 ou d'une EDO d'ordre 2 à coefficients constants avec second membre de type « exponentielle fois polynôme »(programme de PTSI).

La colle se poursuivra par la résolution d'un ou plusieurs exercices fournis par l'examinateur dans le cadre des exigibles.

Notation La résolution de l'EDO détermine la fourchette dans laquelle sera évalué l'étudiant :

— résolution complète : note minimale de 10/20 ;

— résolution de l'équation homogène mais solution particulière erronée : note comprise entre 8 et 14 ;

— rien ne va : note maximale de 7/20.

Les colleurs sont libres d'utiliser toutes les notes allant de 0 à 20 dans le respect des contraintes ci-dessus.

Liste des exigibles

— savoir résoudre une EDL d'ordre 1 homogène et avec second membre ;

— savoir résoudre une EDL d'ordre 2 homogène à coefficients constants et avec second membre du type « polynôme fois exponentielle » ;

— savoir justifier la bonne définition d'une intégrale à paramètre ;

— savoir établir la continuité d'une intégrale à paramètre ;

— savoir établir la classe $\mathscr{C}^1$ d'une intégrale à paramètre et la dériver le cas échéant ;

— savoir appliquer le théorème d'intégration terme à terme pour les séries de fonctions.

I) Domaine de définition d'une intégrale à paramètre

II) Continuité sous le signe intégrale

- Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et soit $f : I\times J \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que
  (i) pour tout $t \in J$, $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur I ;
  (ii) pour tout $x \in I$, $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur J ;
  (iii) il existe une fonction φ continue et intégrable sur J vérifiant : $\forall x \in I, \forall t \in J, |f(x,t)| \leqslant \varphi(t)$.
  Alors $F : x \mapsto \int_J f(x,t)\mathrm{d}t$ est définie et continue sur I.

III) Dérivation sous le signe intégrale

- Soient I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ et soit $f : I\times J \to \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. On suppose que
  (i) pour tout $t \in J$, $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I ;
  (ii) pour tout $x \in I$, $t \mapsto f(x,t)$ et $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ sont continues sur J ;
  (iii) pour tout $x \in I$, $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur J ;
  (iv) il existe une fonction φ continue et intégrable sur J vérifiant : $\forall x \in I, \forall t \in J, \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t)$.
  Alors $F : x \mapsto \int_J f(x,t)\mathrm{d}t$ est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, et
  $$\forall x \in I, \quad F'(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\mathrm{d}t.$$

IV) Théorème d'intégration terme à terme

- Soit une fonction $S : I \to \mathbb{R}$ continue. On suppose qu'il existe une suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que :
  (i) pour tout $t \in I$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n(t)$ converge et vérifie $S(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$;
  (ii) pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est continue et intégrable sur I ;
  (iii) la série de tg $u_n = \int_I |f_n(t)|\mathrm{d}t$ converge.
  Alors la fonction S est intégrable sur I et :
  $$\int_I S(t)\mathrm{d}t = \int_I \left(\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)\right)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\int_I f_n(t)\mathrm{d}t\right).$$